Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 19/20

Mathematik I für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 5 (Abgabe am 15.11.2019)

Aufgabe 25 (16 Punkte)

Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung.

a) $f(x) = x|x|$ b) $f(x) = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$ c) $f(x) = |x^2 - x^4|$ d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

Aufgabe 26 (9 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x\to -3} \dfrac{6x+18}{27+x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^{19}-1024x^9}{8-x^3}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^n-1}{x^k-1}$ für $n, k \in \mathbb{N}$

Aufgabe 27 (9 Punkte)

Bestimmen Sie alle Asymptoten der folgenden Funktionen!

a) $f(x) = \dfrac{7x^3 - 2x^4 + x}{x^4 - 5x}$ b) $f(x) = \dfrac{x^3-1}{x^2+x-2}$ c) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2+x^2}}{2-x}$

Aufgabe 28 (keine Abgabe)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Wir betrachten im Folgenden stets die Asymptotik für $x \to x_0$. Sei weiter $f(x) = o\big((x-x_0)^n\big)$ und $g(x) = o\big((x-x_0)^m\big)$ mit $n, m \in \mathbb{N}_0$.

a) Zeigen Sie:[2]

$$f(x)\, g(x) = o\big((x-x_0)^{n+m}\big)\,.$$

Dafür schreiben wir kurz $o\big((x-x_0)^n\big)\, o\big((x-x_0)^m\big) = o\big((x-x_0)^{n+m}\big)$. sqrt

b) Zeigen Sie[3]

$$f(x) + g(x) \;=\; o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big)\,.$$

Dafür schreiben wir kurz $o\big((x-x_0)^n\big) \;+\; o\big((x-x_0)^m\big) \;=\; o\big((x-x_0)^{\min(n,m)}\big)$.

Aufgabe 29 (5 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbare Funktionen. Beweisen Sie die Produktregel,

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)\,,$$

unter Verwendung der Charakterisierung der Ableitung mit Hilfe von Klein-o (Lemma 4).

---

[2] Denken Sie daran, wie wir in der Vorlesung gezeigt haben, dass $x^m\, o(x^n) = o(x^{n+m})$, $x \to 0$, was die Kurzschreibweise der folgenden Äquivalenz ist,

$$f(x) = o(x^n) \quad \Leftrightarrow \quad x^m\, f(x) = o(x^{n+m})\,,\ x \to 0\,.$$

[3] Dabei ist $\min(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ die kleinste der Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_N$, d.h. z.B. ist $\min(2, 0, 1, 3) = 0$.

Aufgabe 30 (10 Zusatzpunkte)

Die Funktion f sei n-mal differenzierbar. Zeigen Sie (mit vollständiger Induktion):

$$f^{(n)}(x) = \lim_{h\to 0} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n}{\nu} \frac{(-1)^{n+\nu}}{h^n} f(x+\nu h) \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0\,.$$

Hinweis: Werfen Sie einen Blick auf den Beweis der Binomischen Formel (Satz 1).

Aufgabe 31 (100 Zusatzpunkte)

Sinnvolle *Skills* auf KhanAcademy sind diese Woche z.B.

- *Divide polynomials with remainders*,
- *Derivative & the direction of a function*,
- *Visualizing derivatives*,
- *Differentiate polynomials*,
- *Tangents of polynomials* und
- *Basic differentiation rules: table.*

Immer sinnvoll ist auch alles in den Bereichen

- *Pre-algebra – Fractions* und
- *Pre-algebra – Exponents, radicals, and scientific notation.*

Hinweise: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).