Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler

Wintersemester 19/20

Mathematik I für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 6 (Abgabe am 22.11.2019)

Aufgabe 32 (9 Punkte)

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{n+19}\right)^{n}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3n}\right)^{n-19}$ c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{3}{19-n}\right)^{3n}$

Aufgabe 33 (10 Punkte)

Die Hyperbelfunktionen *Sinus Hyperbolicus*, *Kosinus Hyperbolicus* und *Tangens Hyperbolicus* sind definiert durch

$$\sinh(x)=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\,,\quad \cosh(x)=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\quad\text{und}\quad \tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}\,.$$

a) Für welche $x\in\mathbb{R}$ können wir die Funktionen definieren?
b) Bestimmen Sie jeweils den Limes für $x\to\infty$ und $x\to-\infty$.
c) Zeigen Sie: $\cosh^2(x)-\sinh^2(x)=1$.

Aufgabe 34 (10 Punkte)

Berechnen Sie jeweils die Ableitung von

a) $\sinh x$, b) $\cosh x$ und c) $\tanh x$

Drücken Sie dabei die Ergebnisse in möglichst einfacher Form wieder mit Hilfe dieser drei hyperbolischen Funktionen aus. Skizzieren Sie nun die Graphen von $\sinh, \cosh$ und $\tanh$. Auf welchen Teil-Intervallen ihres jeweiligen Definitionsbereichs sind die drei Funktionen streng monoton wachsend oder fallend? Geben Sie größtmögliche Intervalle an, auf denen die drei Funktionen injektiv sind, und schränken Sie die Wertebereiche so ein, dass die Funktionen dort auch surjektiv (und damit bijektiv) sind.

Aufgabe 35 (keine Abgabe)

Die Umkehrfunktion des *Sinus Hyperbolicus* heißt *Area Sinus Hyperbolicus*, Funktionsname Arsinh, d.h. $\operatorname{Arsinh}(\sinh(x))=x$, analog für die anderen hyperbolischen Funktionen. Geben Sie die maximalen Definitions- und Wertebereiche für

a) $\operatorname{Arsinh} x$, b) $\operatorname{Arcosh} x$ und c) $\operatorname{Artanh} x$

an. Bei (a) und (c) ist dies eindeutig – bei (b) sind zwei Zweige anzugeben, analog zum Vorlesungsbeispiel $f(x)=x^2$ mit Umkehrfunktionen von $\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^+$ und von $\mathbb{R}_0^+\to\mathbb{R}_0^-$.

Aufgabe 36 (9 Punkte)

Berechnen Sie mit Hilfe von Satz 6 die Ableitungen von

a) $\operatorname{Arsinh} x$, b) $\operatorname{Arcosh} x$ und c) $\operatorname{Artanh} x$.

Bemerkung: Sie benötigen dazu keine expliziten Darstellungen der Umkehrfunktionen, sondern lediglich die Ableitungen aus Aufgabe 34.

Aufgabe 37 (100 Zusatzpunkte)

Sinnvolle *Skills* auf KhanAcademy sind diese Woche z.B.

- *Evaluate inverse functions*,
- *Finding inverses of linear functions*,
- *Use the properties of logarithms*,
- *Evaluate logarithms (advanced)* und
- *Properties of exponents (rational exponents)*.

Hinweise: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

Aufgabe 38 (keine Abgabe)

Am Mi 20.11.19 findet wegen des Studientags keine Vorlesung statt. Wiederholen Sie stattdessen, was Sie über Sinus, Kosinus und Tangens gelernt haben. Die folgende Checkliste hilft.

a) Ich kenne die Definition von sin, cos und tan in rechtwinkligen Dreiecken.
b) Ich kann sin, cos und tan am Einheitskreis erklären.
c) Ich kann erklären, warum $\forall\, x \in \mathbb{R}$ gilt: $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$.
   Hinweis: Pythagoras am Einheitskreis.
d) Ich kann am Einheitskreis erklären, warum $\sin(-x) = -\sin x$. Was gilt für $\cos(-x)$?
e) Ich kann am Einheitskreis erklären, warum für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ gilt: $\sin x < x < \tan x$.
f) Ich kenne spezielle Werte von sin, cos und tan, z.B. an den Stellen $0, \pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$.
g) Ich kann die Graphen von sin und cos zeichnen (in ein Diagramm), und auch den Graph von tan (in ein anderes Diagramm).
h) Ich kenne die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus:
   (i) $\sin(x + y) = \ldots$
   (ii) $\cos(x + y) = \ldots$
   (iii) Schreiben Sie die Additionstheoreme auch im Spezialfall $y = x$ auf.
   (iv) Zeigen Sie: $1 + \cos(2x) = 2\cos^2(x)$.
i) Ich kenne die Ableitung des Sinus: $\sin'(x) = \cos x$.
   Ich kann erklären, wie daraus $\cos'(x) = -\sin x$ folgt.
   Hinweis: $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$ – warum?

Wo schaue ich nach, wenn ich etwas nicht kenne / mich nicht mehr erinnere?

- Vorlesungsvideos:
  `https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171124_001_mathnat1_0001` (ab 00:21:52)
  `https://timms.uni-tuebingen.de/tp/UT_20171124_002_mathnat1_0001` (bis 00:34:00)
  Klicken Sie im Video unten rechts auf $\equiv$, um ein Inhaltsverzeichnis zu bekommen, von dem Sie direkt an die gewünschte Stelle springen können.
- Skript: Abschnitt 4.10 (Seiten 37–39)
- KhanAcademy – Übungen zum Durchklicken:
  `https://www.khanacademy.org/math/trigonometry`

Notieren Sie alle Fragen, die im Zusammenhang mit dieser Aufgabe auftreten. Posten Sie sie im Webforum und bringen Sie sie am Fr 22.11.19 mit in die Vorlesung.