

Mathematik I für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 7 (Abgabe am 29.11.2019)

Aufgabe 39 (9 Punkte)

Wo sind die folgenden Funktionen differenzierbar? Bestimmen Sie dort die Ableitung.

$$f_1(x) = (\log(x^2))^3, \quad f_2(x) = \log_{19}(x), \quad f_3(x) := x^x.$$

Aufgabe 40 (6 Punkte)

Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$. HINWEIS: Die Regel von l'Hospital ist hilfreich.

Aufgabe 41 (keine Abgabe)

a) Sei $f(x) = (19)^x$. Bestimmen Sie $f'(x)$.

b) Seien $0 < p_j \leq 1$, $j = 1, \dots, n$, mit $\sum_{j=1}^n p_j = 1$, sowie

$$S(\alpha) := \frac{1}{1-\alpha} \log \left(\sum_{j=1}^n p_j^\alpha \right)$$

Bestimmen Sie $\lim_{\alpha \rightarrow 1} S(\alpha)$. HINWEIS: Denken Sie an die l'Hospital'sche Regel.

Aufgabe 42 (6+2+2 = 10 Punkte)

Sei

$$f(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}.$$

a) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$ mit (i) $f(x) = 1$, (ii) $f(x) = -1$ und (iii) $f(x) = 0$.

b) Skizzieren Sie den Graph von f .

c) Ist f in Null stetig? Argumentieren Sie mit ε und δ , und verwenden Sie dabei Ihre Ergebnisse aus Teil a.

Aufgabe 43 (16 Punkte)

In der Vorlesung wurde gezeigt, dass

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} x^\nu \quad \forall |x| < 1.$$

Bestimmen Sie *damit* die Taylorreihen der folgenden Funktionen um Null, und geben Sie an, wo diese konvergieren.

$$\text{a) } \frac{1}{19-x} \quad \text{b) } \frac{1}{1+x^4} \quad \text{c) } \frac{x^{19}}{1+x^2} \quad \text{d) } \frac{1-x}{1+x}$$

HINWEIS: Sie müssen (und sollen) keine Ableitungen berechnen.

Aufgabe 44

(100 Zusatzpunkte)

Sinnvolle *Skills* auf KHANACADEMY sind diese Woche z.B.

- *Limits using trig identities,*
- *Limits at infinity of quotients with trig,*
- *Infinite geometric series* und
- *Function as a geometric series.*

HINWEISE: (i) Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

$$(ii) \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}, \quad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}, \quad \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}.$$