Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 19/20

Mathematik I für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 9 (Abgabe am 13.12.2019)

Aufgabe 51 (10 Punkte)
Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_{ab} definiert durch

$$f_{ab}(x) = \frac{\mathrm{e}^{bx^2}\cos(ax)}{1+x^4}$$

bei Null ein Maximum, für welche ein Minimum? Begründen Sie Ihre Antwort!
Hinweis: Berechnen Sie keine Ableitungen, verwenden Sie Taylorentwicklungen.

Aufgabe 52 (10 Punkte)
Diskutieren Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 3 - x|x|}{|x-1|}$$

für reelle x. Achten Sie dabei insbesondere auf den (maximalen) Definitionsbereich, stetige Fortsetzbarkeit, Asymptoten, Nullstellen sowie Hoch- und Tiefpunkte, und zeichnen Sie die den Graph der Funktion.

Aufgabe 53 (keine Abgabe)
Welche der folgenden Mengen M sind Vektorräume über K?[1]

a) $M = \mathbb{C}^2$, $K = \mathbb{R}$ b) $M = \mathbb{R}^2$, $K = \mathbb{C}$ c) $M = \mathbb{Q}$, $K = \mathbb{R}$,

d) $M = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_3 = 19x_1\,,\ x_1 - x_2 = x_3 \right\}$, $K = \mathbb{R}$

e) $M = \{$Polynome vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten und Steigung 19 im Ursprung$\}$, $K = \mathbb{R}$

f) $M = \{$Polynome vom Grad ≤ 4 mit reellen Koeffizienten und einer Nullstelle bei 19$\}$, $K = \mathbb{R}$

Aufgabe 54 (10 Punkte)
Die Menge aller stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$, genannt $C([a, b])$, ist ein Vektorraum über den reellen Zahlen. Für $x \in [-\pi, \pi]$ sei $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \sin x$, $f_3(x) = \cos x$ und $f_4(x) = \sin^2(\frac{x}{2})$. Zeigen Sie:

a) f_1, f_3, f_4 sind linear abhängig in $C([-\pi, \pi])$.
b) f_1, f_2, f_3 sind linear unabhängig in $C([-\pi, \pi])$.

[1] Überlegen Sie nur, ob aus $\vec{x}, \vec{y} \in M$ folgt, dass auch $\lambda\vec{x} + \mu\vec{y} \in M\ \forall\ \lambda, \mu \in K$. Die Rechenregeln bekommen wir geschenkt. (Warum?)

Aufgabe 55 [2] (12 Zusatzpunkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear unabhängig sind, und stellen Sie – falls möglich – den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ als Linearkombination dieser Vektoren dar.

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 56 (100 Zusatzpunkte)

Sinnvolle *Skills* auf KhanAcademy sind diese Woche z.B.

- *Graphically add & subtract vectors*,
- *Combined vector operations*,
- *Number of solutions to a system of equations algebraically* und
- *Systems of equations word problems*.

Hinweise: Siehe Aufgabe 12 (Blatt 2).

[2] Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.