Universität Tübingen, Mathematisches Institut — Wintersemester 19/20

Dr. Stefan Keppeler

Mathematik I für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 10 (Abgabe am 20.12.2019)

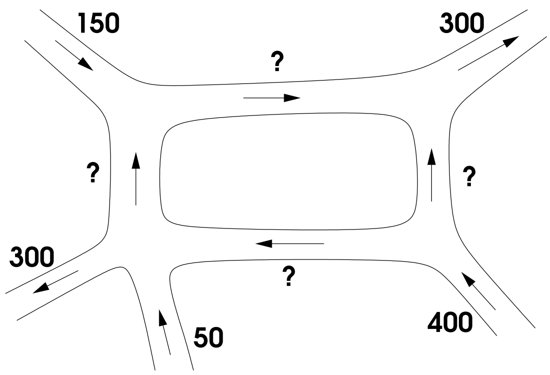
Aufgabe 57 (10 Punkte)

Für welche $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sind die folgenden Vektoren aus $\mathbb{R}^3$ linear abhängig?

a) $\begin{pmatrix} \beta^2 \\ -1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \beta \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \beta \end{pmatrix}.$

Aufgabe 58 (10 Punkte)

Rechts ist der Ausschnitt eines Stadtplans gezeigt, in dem nur Einbahnstraßen zu sehen sind. An jedem Straßenabschnitt wurde eingetragen, wieviele Autos dort während einer bestimmten Zeit entlang gefahren sind. Wir nehmen an, dass alle Autos ihre Fahrt außerhalb des Ausschnitts begonnen und beendet haben.



Was können Sie über die Anzahlen der Autos sagen, die die vier mit Fragezeichen markierten Staßen benutzten? Stellen Sie dazu ein lineares Gleichungssystem auf, bringen Sie dieses auf Zeilenstufenform und geben Sie die Lösungsmenge an. Geben Sie außerdem für jede, der vier Straßen die größt- und die kleinstmögliche Zahl an Autos an.

Hinweis: Zur besseren Vergleichbarkeit bezeichnen Sie bitte die Anzahl der Autos auf den vier Staßen im Uhrzeigersinn mit $x_1, \ldots, x_4$ beginnend mit der unteren.

Aufgabe 59 (12 Punkte)

Geben Sie für alle Vektorräume aus Aufgabe 53 die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 60 (10 Zusatzpunkte)

Sei $f_n(x) = x^n$. Dann ist $V = \operatorname{span}(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$ ein Unterraum von $C(\mathbb{R})$ mit $\dim V = 6$. Sei $L : V \to V$ definiert durch $L(f) = f''$. Sind die Mengen

$$U_1 := \{f \in V \mid L(f) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 := \{g \in V \mid \exists\, f \in V \text{ mit } L(f) = g\}$$

Unterräume von V? Geben Sie ggf. die Dimension und eine Basis an.

Aufgabe 61 [1] (keine Abgabe)

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ x_1 + 4x_2 + 9x_3 &= 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 5x_2 - 9x_3 &= 0 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 7x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 17 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 9x_3 &= -1 \end{aligned}$$

Aufgabe 62 [1] (keine Abgabe)

Formulieren Sie für jede der chemischen Reaktionen

$$x_1\mathrm{CO_2} + x_2\mathrm{H_2} \longrightarrow x_3\mathrm{CH_4} + x_4\mathrm{H_2O}$$

$$y_1\mathrm{H(CH_2)}_n\mathrm{CH_2OH} + y_2\mathrm{O_2} \longrightarrow y_3\mathrm{CO_2} + y_4\mathrm{H_2O}$$

(für beliebiges $n \in \mathbb{N}_0$) ein lineares Gleichungssystem für die Werte x_i bzw. y_j aus der Bedingung, dass auf beiden Seiten des Reaktionspfeils dieselbe Anzahl von H-, C- und O-Atomen stehen. Bestimmen Sie die jeweilige Lösungsmenge und darin die Teilmenge derjenigen Lösungen, bei denen alle x_i bzw. y_j positive ganze Zahlen sind.

[1] Diese Aufgabe wird nicht in den Übungsgruppen besprochen. Das Vergleichen von Ergebnissen und die Diskussion von Lösungswegen, z.B. im Webforum, ist aber erwünscht und wird unterstützt.