Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 19/20

Mathematik I für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 11 (Abgabe am 10.01.2020)

Aufgabe 63 (14 Punkte)

Überprüfen Sie, ob durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ jeweils ein Skalarprodukt auf V definiert wird.

a) $V=\mathbb{R}^n$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\vec{a}\cdot\vec{b}=\sum_{j=1}^{n}a_jb_j$ b) $V=\mathbb{R}^3$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=2a_1b_1+a_2b_2+9a_3b_3$

c) $V=\mathbb{R}^2$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=a_1b_1-a_2b_2$ d) $V=\mathbb{R}^2$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2$

e) $V=\mathbb{R}^3$, $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=a_1b_1+a_2b_2+2a_3b_3-a_2b_3-a_3b_2$

Hinweis: Die Eigenschaften (S1) und (S2) können Sie für alle Aufgabenteile gleichzeitig überprüfen, denn alle Abbildungen haben die Form $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\sum_j\sum_k\mu_{jk}a_jb_k$ mit $\mu_{kj}=\mu_{jk}$.

Aufgabe 64 (18 Punkte)

Seien

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ \vec{a}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\ \vec{a}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

und $U=\operatorname{span}(\vec{a}_2,\vec{a}_3)\subset\mathbb{R}^3$.

a) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das kanonische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ und die zugehörige Norm.
   (i) Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\|=|\vec{a}_j|$, $j=1,2,3$ und alle Skalarprodukte $\langle\vec{a}_j,\vec{a}_k\rangle=\vec{a}_j\cdot\vec{a}_k$, $j\neq k$.
   (ii) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine ONB von U.

b) Verwenden Sie in diesem Aufgabenteil das Skalarprodukt aus Aufgabe 63e und die zugehörige Norm.
   (i) Berechnen Sie die Normen $\|\vec{a}_j\|$, $j=1,2,3$ und alle Skalarprodukte $\langle\vec{a}_j,\vec{a}_k\rangle$, $j\neq k$.
   (ii) Bestimmen Sie mithilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahrens eine ONB von U.

Aufgabe 65 (8 Zusatzpunkte)

Bestimmen Sie eine ON-Basis für

$$U=\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\1\\0\end{pmatrix}\right)\subset\mathbb{R}^4$$

bezüglich des kanonischen Skalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$.

Aufgabe 66 (keine Abgabe)

Gilt $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ für beliebige $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}\in\mathbb{R}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!