

Mathematik I für Naturwissenschaftler*innen

Übungsblatt 13 (Abgabe am 24.01.2020)

Aufgabe 72

(4+4+3+4=15 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie $\det A$.
- Berechnen Sie B^{-1} und $\det B$.
- Bestimmen Sie $\det C$, $\det(C^{-1})$ und $\det(C^5)$.
- Berechnen Sie mithilfe von B^{-1} die Lösungen \vec{x} und X von

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad BX = C.$$

Wie hätten Sie \vec{x} oder X berechnen können, ohne zunächst B^{-1} zu bestimmen?

Aufgabe 73

(10 Punkte)

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x^2 + y^2 \neq 0$ und sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ x & y & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Bestimmen Sie } A^{-1}.$$

HINWEIS: Die Abkürzung $r^2 := x^2 + y^2$ ist geschickt, und das Ergebnis lässt sich besonders hübsch in der Form $A^{-1} = \frac{1}{r^2}(\dots)$ angeben.

Aufgabe 74

(10 Zusatzpunkte)

Wir definieren die Potenz A^n einer quadratischen Matrix A durch

$$A^0 = I \text{ und } A^{n+1} = AA^n,$$

$$\text{d.h. } A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \dots$$

Weiter definieren wir e^{Ax} für $x \in \mathbb{R}$ durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h. $e^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$. Berechnen Sie e^{Ax} für $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

HINWEISE: (i) Berechnen Sie zunächst A^2 , A^3 und A^4 . Folgern Sie daraus, wie A^n aussieht.
(ii) Aus der Definition der Matrixaddition (komponentenweise) folgt

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 75

Sinnvolle *Skills* auf KHANACADEMY sind diese Woche z.B.

- *Inverse of a 3×3 matrix,*
- *Determinant of a 3×3 matrix* und
- *Represent linear systems with matrix equations.*