

## Mathematik I für Naturwissenschaftler\*innen

Übungsblatt 13 (Abgabe am 24.01.2020)

### Aufgabe 72

(4+4+3+4=15 Punkte)

Seien

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- Berechnen Sie  $\det A$ .
- Berechnen Sie  $B^{-1}$  und  $\det B$ .
- Bestimmen Sie  $\det C$ ,  $\det(C^{-1})$  und  $\det(C^5)$ .
- Berechnen Sie mithilfe von  $B^{-1}$  die Lösungen  $\vec{x}$  und  $X$  von

$$B\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad BX = C.$$

Wie hätten Sie  $\vec{x}$  oder  $X$  berechnen können, ohne zunächst  $B^{-1}$  zu bestimmen?

### Aufgabe 73

(10 Punkte)

Seien  $x, y \in \mathbb{R}$  mit  $x^2 + y^2 \neq 0$  und sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ x & y & 0 \end{pmatrix}. \quad \text{Bestimmen Sie } A^{-1}.$$

HINWEIS: Die Abkürzung  $r^2 := x^2 + y^2$  ist geschickt, und das Ergebnis lässt sich besonders hübsch in der Form  $A^{-1} = \frac{1}{r^2}(\dots)$  angeben.

### Aufgabe 74

(10 Zusatzpunkte)

Wir definieren die Potenz  $A^n$  einer quadratischen Matrix  $A$  durch

$$A^0 = I \text{ und } A^{n+1} = AA^n,$$

$$\text{d.h. } A^0 = I, \quad A^1 = A, \quad A^2 = AA, \quad A^3 = AAA, \dots$$

Weiter definieren wir  $e^{Ax}$  für  $x \in \mathbb{R}$  durch die bekannte Taylorreihe der e-Funktion, d.h.  $e^{Ax} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} A^n$ . Berechnen Sie  $e^{Ax}$  für  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ .

HINWEISE: (i) Berechnen Sie zunächst  $A^2$ ,  $A^3$  und  $A^4$ . Folgern Sie daraus, wie  $A^n$  aussieht.  
(ii) Aus der Definition der Matrixaddition (komponentenweise) folgt

$$\sum_n \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_n a_n & \sum_n b_n \\ \sum_n c_n & \sum_n d_n \end{pmatrix}.$$

### **Aufgabe 75**

Sinnvolle *Skills* auf KHANACADEMY sind diese Woche z.B.

- *Inverse of a  $3 \times 3$  matrix,*
- *Determinant of a  $3 \times 3$  matrix* und
- *Represent linear systems with matrix equations.*