Mathematik I für Naturwissenschaftler∗innen

Übungsblatt 15 (keine Abgabe, Besprechung im Sommersemester)

Aufgabe 82
Die Menge der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$,

$$C([a,b]) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$$

ist ein Vektorraum über $\mathbb{R}$ (vgl. Aufgaben 54 & 60).
Zeigen Sie: $\langle \cdot, \cdot \rangle : C([a,b]) \times C([a,b]) \to \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

ist ein Skalarprodukt.

Aufgabe 83
Zeigen Sie: Die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx)$, $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$ bilden ein Orthonormalsystem (ONS) in $C([0,2\pi])$ bzüglich des Skalarprodukts aus Aufgabe 82.

Aufgabe 84 (Fourierreihen)
Die Funktionen aus Aufgabe 83 bilden nicht nur ein ONS sondern tatsächlich auch die ∞-dimensionale Verallgemeinerung einer Basis (eine sogenannte Schauderbasis bzw. ein vollständiges ONS)[2]. Sie können nun ein Element aus $f \in C([0,2\pi])$, d.h. eine stetige Funktion $f(x)$, in diese Basis entwickeln, d.h. die Funktion als Linearkombination der Basisfunktionen darstellen,[3]

$$f(x) = \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\cos(nx)}{\sqrt{\pi}} + b_n \frac{\sin(nx)}{\sqrt{\pi}} \right) . \tag{$*$}$$

Die Koeffizienten a_n und b_n erhalten Sie, indem Sie das Skalarprodukt von f mit den Basisvektoren bilden (vgl. Abschnitt 5.5 der Vorlesung), d.h.

$$a_0 = \left\langle \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\,,\, f \right\rangle , \quad a_n = \left\langle \tfrac{\cos(n\,\cdot)}{\sqrt{\pi}}\,,\, f \right\rangle , \quad b_n = \left\langle \tfrac{\sin(n\,\cdot)}{\sqrt{\pi}}\,,\, f \right\rangle \quad \text{für} \quad n \in \mathbb{N} ,$$

bzw. explizit

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{d}x\,, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \cos(nx)\, f(x)\, \mathrm{d}x\,, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \sin(nx)\, f(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Wir nennen $(*)$ die Fourierreihe von f. Bestimmen Sie die Fourierreihen von

a) $f(x) = \cos^2 x$
b)

$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & , \quad \frac{\pi}{2} < x \le \frac{3\pi}{2} \\ x - 2\pi & , \quad \frac{3\pi}{2} < x \le 2\pi \end{cases}$$

Hinweise: Für Teil (a) müssen Sie keine Integrale ausrechnen. Skizzieren Sie für Teil (b) zunächst den Graph von g und überlegen Sie sich, dass $a_n = 0\ \forall\ n \in \mathbb{N}_0$ und $b_{2n} = 0$ $\forall\ n \in \mathbb{N}$ (warum?).

[2] Eigentlich sollten wir hier besser nicht nur von $C([a,b])$ sprechen, sondern von "etwas größeren" Funktionenräumen…

[3] Für hinreichend gutartige Funktionen konvergiert die Reihe dann auch wieder gegen die Funktion.