Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 19/20

Mathematik I für Naturwissenschaftler∗innen

Klausur am 07.02.2020

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg und vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich!**

Es sind maximal 109 Punkte erreichbar, 88 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 44 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+3 = 6 Punkte)

Sei $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und für $n \geq 1$ sei $\vec{x}_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x}_n$.

a) Berechnen Sie $\vec{x}_2$, $\vec{x}_3$ und $\vec{x}_4$.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $\vec{x}_n = \begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix} \ \forall\, n \geq 1$.

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{(x^2-1)\sin^2(x) + (x^2+1)\cos^2(x)}{2x^2 - x + 3}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^6 - 2x^3} - \sqrt{x^6 + x^3}\right)$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-1)\sin^2(x) + (x^2+1)\cos^2(x)}{2x^2 - x + 3}$ d) $\displaystyle\lim_{x\to 1/2} \frac{\cos(\pi x)}{\log(2x)}$ e) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin^5(x)}{x^3(x^4 - 2x^2)}$

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{19}{20}\right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{19} \binom{20}{n+1} (-1)^n$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{19} \sum_{\mu=1}^{19} \frac{\nu}{19}$ d) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{20} \sum_{\nu=\mu}^{20} \frac{20}{\nu}$

Aufgabe 4 (3+3+3 = 9 Punkte)

Sei $f(x) = \log(\log x)$ und $g(x) = x^2\, 3^x$. Berechnen Sie

a) $f'(x)$ b) $g'(x)$ sowie c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{4x^2-1}{x}\,\mathrm{d}x$.

Aufgabe 5 (3+3+4 = 10 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

a) $\dfrac{20-17\mathrm{i}}{3\mathrm{i}-2}$ b) $\mathrm{e}^{5\pi\mathrm{i} + \log 7}$ c) $\left(\dfrac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{2020}$

Aufgabe 6 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{5x^2+20}$ und b) $\dfrac{e^{-x^2}}{1-x^2}$ um Null, sowie die Taylorreihe von

c) $\cos x$ um $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 7 (1+3+2+2+3+3+4 = 18 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - x - x|x+1|}{|x+1|}.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
g) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $-1 \in B$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \to A$ die Umkehrfunktion von f. Bestimmen Sie $f^{-1}(-1)$ sowie ${f^{-1}}'(-1)$.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Sei $f(x) = |\sin x| \ \forall x \in \mathbb{R}$ und sei

$$F(x) := \int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Bestimmen Sie $F(3\pi/2) - F(\pi)$.

Aufgabe 9 (3+3+2+3 = 11 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Berechnen Sie $A^T A$.
b) Bestimmen Sie A^{-1}.
c) Berechnen Sie $\det B$.
d) Bestimmen Sie alle $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, die $B^{-1}\vec{x} = \vec{c}$ erfüllen.

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Wir betrachten $\mathbb{C}$ als Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die lineare Abbildung $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sei definiert durch $L(z) = (1 + \mathrm{i})\operatorname{Re}(z)$. Bestimmen Sie die Dimensionen der Unterräume

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid L(z) = 0\} \qquad \text{und} \qquad U_2 = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists w \in \mathbb{C} \text{ mit } L(w) = z\}\,,$$

und geben Sie jeweils eine Basis an.