Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Dr. Stefan Keppeler Wintersemester 19/20

Mathematik I für Naturwissenschaftler∗innen

Nachklausur am 08.06.2020

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. Vereinfachen Sie Ihre Ergebnisse so weit wie möglich. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 110 Punkte erreichbar, 88 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 44 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (3+3 = 6 Punkte)

Sei $A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und für $n \geq 0$ sei $A_{n+1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} A_n$.

a) Berechnen Sie A_1, A_2 und A_3.

b) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion: $A_n = \begin{pmatrix} 1 & 3n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \forall\, n \geq 0$.

Aufgabe 2 (3+3+3+3+3 = 15 Punkte)

Bestimmen Sie, falls existent, die folgenden Grenzwerte, oder begründen Sie ggf., warum diese nicht existieren.

a) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^7 - 1}{x^9 - 1}$ b) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{\cos x}{\sin(2x)}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x - \sin x)^2}{(1 - \cos x)^3}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^{20} - 2x^{10}} - \sqrt{x^{20} + x^{10}} \right)$ e) $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\sin x} \right)$

Aufgabe 3 (4+4+4+4 = 16 Punkte)

Berechnen Sie (d.h. das Ergebnis soll kein Summenzeichen mehr enthalten):

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{19}{20} \right)^n$ b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{19} \binom{20}{n+1} (-1)^n$ c) $\displaystyle\sum_{\nu=1}^{19} \sum_{\mu=1}^{19} \frac{\nu}{19}$ d) $\displaystyle\sum_{\mu=1}^{20} \sum_{\nu=\mu}^{20} \frac{20}{\nu}$

Aufgabe 4 (3+3+3 = 9 Punkte)

Sei $f(x) = \log(\log x)$ und $g(x) = x^3\, 2^x$. Berechnen Sie

a) $f'(x)$ b) $g'(x)$ sowie c) $\displaystyle\int_1^{\mathrm{e}} \frac{x^2 - 4}{x}\, \mathrm{d}x\,.$

Aufgabe 5 (3+3+4 = 10 Punkte)

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen.

a) $\dfrac{8 + 2\mathrm{i}}{5 - 3\mathrm{i}}$ b) $\mathrm{e}^{-3\pi\mathrm{i} + \log 5}$ c) $\left(\dfrac{1 - \mathrm{i}}{\sqrt{2}} \right)^{2020}$

Aufgabe 6 (4+4+4 = 12 Punkte)

Bestimmen Sie die Taylorreihen von

a) $\dfrac{1}{\pi^2 - x^2}$ und b) $\dfrac{\cos x}{1 - x^2}$ um Null, sowie die Taylorreihe von

c) $\sin x$ um $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, und geben Sie an, wo die Reihen konvergieren.

Aufgabe 7 (1+3+2+2+3+2+4 = 17 Punkte)

Wir untersuchen die Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 + 5x + 2 - x|x|}{x}.$$

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ ist $f(x)$ definiert?
b) Bestimmen Sie alle Asymptoten von f.
c) Berechnen Sie alle Nullstellen.
d) Berechnen Sie $f'(x)$.
e) Bestimmen Sie alle Hoch- und Tiefpunkte.
f) Zeichnen Sie den Graph der Funktion.
g) Geben Sie möglichst große Intervalle $A, B \subseteq \mathbb{R}$ mit $-\frac{1}{2} \in A$ an, so dass $f : A \to B$ bijektiv ist. Sei $f^{-1} : B \to A$ die Umkehrfunktion von f. Bestimmen Sie $f^{-1}(0)$ sowie ${f^{-1}}'(0)$.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Sei $f(x) = |x + 2| \;\forall x \in \mathbb{R}$ und sei

$$F(x) := \int_{-5}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Bestimmen Sie $F(8) - F(2)$.

Aufgabe 9 (2+4+3+3+3 = 15 Punkte)

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie $\det A$.
b) Berechnen Sie A^2 und A^3.
c) Bestimmen Sie A^{-1}.
d) Bestimmen Sie alle X, die $AX = B$ erfüllen.
e) Berechnen Sie $B^T A^{666} B$.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit $A\left(\begin{smallmatrix}1\\0\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right)$ und $A\left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix}1\\2\\3\end{smallmatrix}\right)$. Bestimmen Sie $A\left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right)$.