Kap. 1: Topologische, metrische und normierte Räume

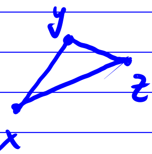
1.1 Def X = Menge, $d: X \times X \to [0,\infty)$ heißt Metrik auf X, wenn $\forall x,y,z \in X$:

i) $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ("Definitheit")

ii) $d(x,y) = d(y,x)$ ("Symmetrie")

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

("Dreiecks-Ungl.")



Dann heißt (X,d) metrischer Raum und $d(x,y)$ der Abstand von x und y.

1.2 Bspe

a) $X = \mathbb{R}^n$, $d(x,y) = \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$

ist eine Metrik (ÜA Bl. 3)

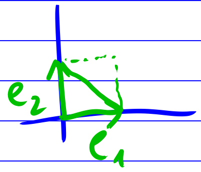
"Euklidische Metrik"

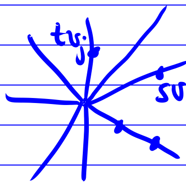
b) X bel., $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y \\ 1 & \text{falls } x \neq y. \end{cases}$

heißt die diskrete Metrik auf X

(Bsp: $X = \left\{ \frac{e_1}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{e_n}{\sqrt{2}} \right\} \subset \mathbb{R}^n$

$$d_{\text{Eukl}}\left(\frac{e_i}{\sqrt{2}}, \frac{e_j}{\sqrt{2}}\right) = \begin{cases} 0 & \text{falls } i=j \\ 1 & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$



c) $X =$ 

$\subset \mathbb{R}^n$

$d =$ Entf. in $X = \bigcup_{i \in J} \{ s v_i \mid s \geq 0 \}$

$\|v_i\| = 1$ in $\mathbb{R}^n$

$$d(sv_i, tv_j) = \begin{cases} |s-t| & \text{falls } i=j \\ s+t & \text{falls } i \neq j \end{cases}$$

"franz. Eisenbahnsystem"

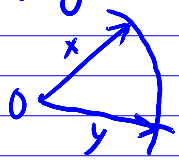
d) $X = S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$

$X = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1 \}$

$d_{\text{sph}} =$ Entf. entlang X

$d_{\text{sph}}(x,y) = \arccos\langle x, y \rangle$

"sphärische Metrik"



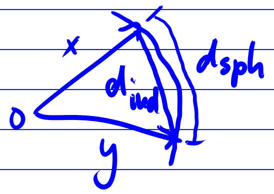
1.3 Def Sei (X,d) metrischer Raum, $Y \subset X$. Die *induzierte Metrik* d_{ind} auf Y ist

$$d_{ind}(y_1,y_2) = d(y_1,y_2) \quad \forall y_1,y_2 \in Y$$

d.h. $d_{ind} = d|_{Y\times Y}$

Bem d_{ind} ist eine Metrik auf Y.

Bsp $S^2 \subset \mathbb{R}^3$, $d_{ind} \neq d_{sph}$



Antipoden
$d_{ind} = 12.000$ km
$d_{sph} = 20.000$ km

(2.9b) **Def** Seien (X,d_X), (Y,d_Y) metr. Räume. $f: X \to Y$ heißt *Isometrie*, wenn $\forall x_1,x_2 \in X$: $d_Y(f(x_1),f(x_2))$
$$= d_X(x_1,x_2).$$
(X,d_X) und (Y,d_Y) heißen *isometrisch*, wenn $\exists f: X \to Y$ bij. Isometrie.

Bem "isometrisch" ist Äq.rel. auf den metr. Räumen. (Denn f^{-1} ist auch Isometrie.)

Bspe Diese $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sind bij. Isometrien: (nicht die einzigen)

- Translationen mit konst. $a \in \mathbb{R}^n$, $f(x) = x + a$.
- Spiegelungen $f(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ alle $\lambda_j \in \{+1, -1\}$.
- Rotationen: $f(x) = Rx$, $R \in SO(n)$

Def Ein <u>n-dim. Euklidischer Raum</u> ist ein metrischer Raum, der isometrisch ist zu $(\mathbb{R}^n, d_{Eukl})$.

Bem Isometrie = cartesisches Koo'-system.