Norm

1.5 Def Sei V VR über $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
$\|\cdot\| : V \to [0,\infty)$ heißt eine **Norm** auf V, wenn $\forall x,y \in V$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$:

(i) $\|x\| = 0 \iff x = 0$ ("Definitheit")

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ ("Homogenität")

(iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ("Dreiecks-Ungl.")

$(V, \|\cdot\|)$ heißt dann ein normierter Raum

Prop 1.6 Auf jedem normierten Raum $(V, \|\cdot\|)$ wird durch
$$d(x,y) = \|x-y\|$$
eine Metrik definiert.

Bew i) $d(x,y) = 0 \iff \|x-y\| = 0$
$\iff x-y = 0 \iff x = y$.

ii) $d(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)\cdot(x-y)\|$
$= \cancel{|-1|} \cdot \|x-y\| = d(x,y)$.

iii) $d(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\|$
$\leq \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$.

$\square$

Bem jeder norm. Raum ist metr. Raum.

Metrik ist translations-invariant:

$$d(x+a,\ y+a) = d(x,y)$$

$\forall x, y, a \in V$.

Beweis: $d(x+a, y+a) = \| \underbrace{(x+a) - (y+a)}_{x-y} \|$

$= d(x,y)$. $\square$

Bspe 1.7 a) Die Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$: $\quad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$

ist eine Norm (ÜA Bl. 3). Die zugeh. Metrik = Euklidische Metrik.

b) Maximumsnorm ("∞-Norm") auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

ist Norm (ohne Bew.)

Summennorm ("1-Norm") auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$$

p-Norm, $p \in [1, \infty)$ auf $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}$$ sind Normen

Tats. $\lim\limits_{p \to \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

c) Funktionenräume:

Sei $f: [a,b] \to \mathbb{C}$

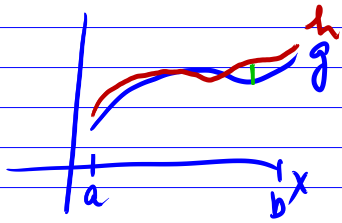
$$\|f\|_1 := \int_a^b dx \, |f(x)|$$

$$\|f\|_2 := \left(\int_a^b dx \, |f(x)|^2\right)^{1/2}$$

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b dx \, |f(x)|^p\right)^{1/p}, \quad p \in [1,\infty)$$

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}$$

"Supremumsnorm"



$f = h - g$

$\sup_x |f(x)| = \|f\|_\infty =$ max. Fehler

durchschn. Fehler $= \frac{1}{b-a} \int_a^b dx \, |f(x)| = \frac{1}{b-a} \|f\|_1$

Prop Sei X eine bel. Menge,

$$V = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid \sup_{x \in X} |f(x)| < \infty \}$$

(Raum aller beschr. Fktnen $X \to \mathbb{C}$)

Dann ist $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$

eine Norm auf V.

Bew (i) $\|f\|_\infty = 0 \iff \forall x \in X : |f(x)| = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \forall x \in X: \ f(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad f = 0 \ .$$

(ii) $\|\lambda f\|_\infty = \sup\limits_{x \in X} \underbrace{|\lambda f(x)|}_{|\lambda|\,|f(x)|} = |\lambda| \underbrace{\sup\limits_{x \in X} |f(x)|}_{\|f\|_\infty}$, $\lambda \in \mathbb{C}$

(iii) $|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \|f+g\|_\infty &= \sup_x |f(x)+g(x)| \\ &\leq \sup_x \left(|f(x)| + |g(x)|\right) \\ &\leq \left(\sup_x |f(x)|\right) + \left(\sup_x |g(x)|\right) \\ &= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty . \qquad \square \end{aligned}$$

d) Ersetze $\mathbb{C}$ durch bel. norm. Raum $(Y, \|\cdot\|_Y)$: $f: X \to Y$

$\|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in X} \|f(x)\|_Y$ ist Norm

auf $V = \{ f: X \to Y \mid \sup\limits_{x \in X} \|f(x)\|_Y < \infty \}$