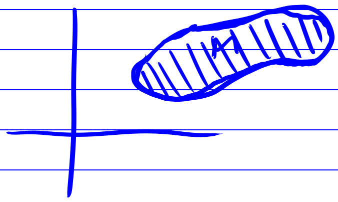
Offene und abgeschlossene Mengen

Anschaulich: Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}^n$



ist offen, wenn sie keinen ihrer Randpunkte enthält

abgeschlossen: alle Randpkte enthält.

Def 1.9 Sei (X,d) metr. Raum

a) Für $x_0 \in X$, $r>0$ heißt

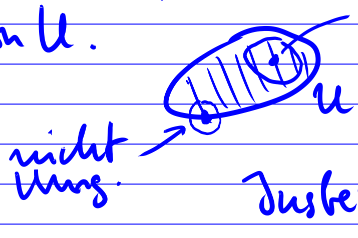
$$B_r(x_0) = \{x \in X \mid d(x,x_0) < r\}$$

der offene Ball um x_0 vom Radius r.

b) $U \subseteq X$ heißt eine Umgebung von $x_0 \in X$, falls

$$\exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x_0) \subseteq U$$

Dann heißt x_0 ~~sei~~ ein innerer Punkt von U.



U Umg. von x_0

Insbes. $B_r(x_0)$ ist Umg von x_0 $(\varepsilon := r)$

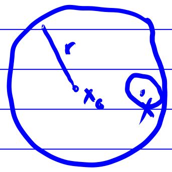
c) $M \subseteq X$ heißt **offen**, falls

$$\forall x \in M \ \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq M.$$

Also M offen $\Leftrightarrow$ M ist Umg. jedes ihrer Elemente $\Leftrightarrow$ M enthält nur innere Pkte.

Bsp 1.10 a) $B_r(x_0)$ ist stets offen.

Bew Sei $x \in B_r(x_0)$, dann $d(x, x_0) < r$.



Setze $\varepsilon := r - d(x, x_0) > 0$.

Dann ist $B_\varepsilon(x) \subseteq B_r(x_0)$, denn:

$$y \in B_\varepsilon(x) \Rightarrow d(y, x_0) \le \underbrace{d(y,x)}_{< \varepsilon} + d(x, x_0)$$

$$< \varepsilon + d(x, x_0) = r \Rightarrow y \in B_r(x_0)$$

$\square$

b) $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$ ist offen (bzgl. Eukl. Metrik $d(x,y) = |x-y|$)

Bew $(a,b) = B_{\frac{b-a}{2}}\left(\frac{a+b}{2}\right)$ $\square$

c) Sei $d =$ diskrete Metrik auf X. Dann ist jede Teilmenge $M \subseteq X$ offen.

Bew: $B_{\frac{1}{2}}(x) = \{x\}$, daher

$\forall x \in M \; \exists \varepsilon = \frac{1}{2}: \; B_\varepsilon(x) \subseteq M.$ $\square$

Prop. 1.11 Sei X metr. Raum

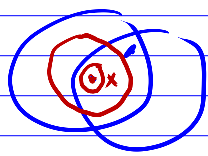
a) $\emptyset$ und X sind offen.

b) Sind $M_1, \ldots, M_K \subseteq X$ offen, so ist auch $\bigcap_{i=1}^{K} M_i$ offen.

c) Sei J eine Indexmenge. Sind alle M_i, $i \in J$, offen, so ist auch $\bigcup_{i \in J} M_i$ offen.

Bew a) Klar.

b) Sei $x \in \bigcap_{i=1}^{K} M_i$.



Wegen $x \in M_i$ und M_i offen, gibt $r_i > 0$ mit $B_{r_i}(x) \subseteq M_i$.

Setze $\varepsilon := \min\{r_1, \ldots, r_K\} > 0$.

Dann $B_\varepsilon(x) \subseteq B_{r_i}(x) \subseteq M_i \quad \forall i$,

also $B_\varepsilon(x) \subseteq \bigcap_{i=1}^{K} M_i$.

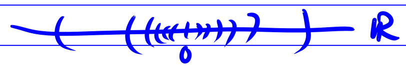
c) Sei $x \in \bigcup_{i\in J} M_i$. Dann gibt es $i_0 \in J$ mit $x \in M_{i_0}$. Da M_{i_0} offen, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subseteq M_{i_0} \subseteq \bigcup_{i\in J} M_i$. □

Bem 1.12 "endl. Schnitte offener Mengen sind offen"

"bel. Vereinigungen offener Mengen sind offen"

Bsp M_n, $n \in \mathbb{N}$, offen, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n$ möglicherweise nicht offen

$M_n := \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$



$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} M_n = \{0\}$ nicht offen.

Def 1.13 Sei X metr. Raum.
$A \subseteq X$ heißt abgeschlossen,
wenn ihr Komplement $A^c := X \setminus A$
offen ist.

Bspe 1.14 a) $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ ist abg.
$\left([a,b]^c = (-\infty, a) \cup (b, \infty) \text{ offen} \right)$

b) $[a, \infty) \subseteq \mathbb{R}$ ist abg.

c) $[a,b) \subseteq \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$
ist weder abg. noch offen.

d) Sei (X,d) metr. Raum
$\emptyset$ und X sind sowohl offen
als auch abg. in X. $\left(\emptyset^c = X \right.$
$\left. X^c = \emptyset \right)$

e) Sei $X := [0, \infty) \subseteq \mathbb{R}$
$d = d_{ind}$. Dann ist $[0,1)$ offen in X
aber nicht in $\mathbb{R}$.
(In X ist $B_r(0) = [0, r)$.)

Prop 1.16 In einem metr. Raum X gilt:
a) $\emptyset$ und X sind abg.
b) Sind $M_1, \dots, M_K \subseteq X$ abg., so ist
auch $\bigcup_{i=1}^{K} M_i$ abg.
c) Bel. Schnitte abg.er Mengen sind abg.

Beweis de Morgan - Regeln

$$\left(\bigcup_{i\in J} M_i\right)^c = \bigcap_{i\in J} (M_i^c)$$

$$\left(\bigcap_{i\in J} M_i\right)^c = \bigcup_{i\in J} (M_i^c)$$

$\xRightarrow{\text{Prop. 1.11}}$ b) und c). $\square$