$\cancel{\subseteq}$ $\quad \subset$ Teilmenge

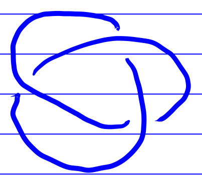
$\subsetneq$ echte Teilmenge

Topologische Räume

Topologie = Studium von Figuren modulo Verformung

Bsp: Knotentheorie

Knoten = $\underbrace{\text{geschl.}}_{x(b)=x(a)}$ Kurve $x: [a,b] \to \mathbb{R}^3$



Potenzmenge = {alle Teilmengen}

Def 1.17 Sei X Menge, $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(X)$

$\mathcal{T}$ heißt eine Topologie auf X (und $(X, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum), falls

a) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$

b) $U, V \in \mathcal{T} \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{T}$

c) wenn $\forall i \in J: U_i \in \mathcal{T}$, dann $\bigcup_{i \in J} U_i \in \mathcal{T}$

Mengen $U \in \mathcal{T}$ heißen dann offene Mengen, ihre Komplemente $U^c = X \setminus U$ abg.

Def Sei $A \subset X$, $x_0 \in A$.

x_0 heißt <u>innerer Punkt von A</u>

und A heißt <u>Umgebung von x_0</u>, wenn

$$\exists M \in \mathcal{J} : \quad x_0 \in M \text{ und } M \subset A.$$

<u>Also</u>: Jede Metrik def. eine Topologie.

Def 1.19 Sei X top Raum, $Y \subset X$.

a) $\mathring{Y} := \bigcup_{\substack{U \subset Y \\ U \text{ offen}}} U$ heißt <u>das Innere von Y</u> oder der <u>offene Kern von Y</u>.

(Beachte: $\mathring{Y}$ ist offen, $\mathring{Y} \subset Y$.)

b) $\overline{Y} := \bigcap_{\substack{A \supset Y \\ A \text{ abg.}}} A$ heißt <u>der Abschluss von Y</u> oder die <u>abg. Hülle von Y</u>

(Beachte: $\overline{Y}$ ist abg., $\overline{Y} \supset Y$)

c) $\partial Y := \overline{Y} \setminus \mathring{Y}$ heißt <u>der Rand</u> von Y.

Bem. • $\mathring{Y}$ ist die größte in Y enthaltene offene Menge.

d.h. $\mathring{Y}$ ist offen, $\mathring{Y} \subset Y$,

$\forall U \subset Y$: wenn U offen, dann $U \subset \mathring{Y}$.

Beachte: $\nexists$ größte in Y enth. abg. Menge, außer wenn Y abg.

• Y ist offen $\Longleftrightarrow$ $Y = \mathring{Y}$

• $\overline{Y}$ ist die kleinste abg. Menge, in der Y enthalten ist.

• Y ist abg. $\Longleftrightarrow$ $Y = \overline{Y}$

• $\mathring{Y} = \left(\overline{Y^c}\right)^c$

[beachte $(Y^c)^c = Y$]

$\overline{Y} = \left((Y^c)^\circ\right)^c$

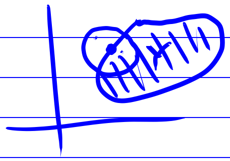
• $(Y^c)^\circ = (\overline{Y})^c$, $\overline{Y^c} = (\mathring{Y})^c$

Prop. 1.20 Sei X top. Raum, $Y \subset X$.

a) $\mathring{Y} = \{$innere Pkte von $Y\}$

b) $\forall x \in X$: $x \in \partial Y \Longleftrightarrow$

jede Umg. von x enthält einen Punkt aus Y und einen Punkt aus Y^c.



c) $\mathring{Y} = Y \setminus \partial Y$

d) $\partial(Y^c) = \partial Y$

e) $\overline{Y} = Y \cup \partial Y$.

Bew a), b) ÜA Bl. 3

c) $$\partial Y \overset{Def}{=} \overline{Y} \setminus \mathring{Y} \overset{[A \setminus B = A \cap B^c]}{=} \overline{Y} \cap (\mathring{Y})^c$$

$$\Rightarrow (\partial Y)^c \overset{deM}{=} (\overline{Y})^c \cup \mathring{Y} = \mathring{Y} \cup \overline{Y}^c$$

$$\cancel{= \mathring{Y} \times \overline{Y}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{Y \setminus \partial Y}} = Y \cap (\partial Y)^c = Y \cap \left(\mathring{Y} \cup \overline{Y}^c\right)$$

$$= \underbrace{\left(Y \cap \underbrace{\mathring{Y}}_{\subset Y}\right)}_{= \mathring{Y}} \cup \underbrace{\left(Y \cap \underbrace{\overline{Y}^c}_{(Y^c)^\circ \subset Y^c}\right)}_{\emptyset} = \underline{\underline{\mathring{Y}}}.$$

1.20d) $$\underline{\underline{\partial(Y^c)}} \overset{Def}{=} \underbrace{\overline{Y^c}}_{(\mathring{Y})^c} \setminus \underbrace{(Y^c)^\circ}_{\overline{Y}^c}$$

$$= (\mathring{Y})^c \cap \overline{Y} = \overline{Y} \setminus \mathring{Y} = \underline{\underline{\partial Y}}.$$

1.20 e) $$\overline{Y} = ((Y^c)^\circ)^c \overset{c)}{=} \Big(Y^c \setminus \underbrace{\partial(Y^c)}_{\overset{d)}{=} \partial Y}\Big)^c$$

$$\underset{[(A \setminus B)^c = A^c \cup B]}{=} \underline{\underline{Y \cup \partial Y}}$$

□

Bspe 1.21

a) $Y := (a,b] \subset \mathbb{R} =: X$. Dann

$\mathring{Y} = (a,b)$, $\overline{Y} = [a,b]$, $\partial Y = \{a,b\}$.

b) $Y := \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0: \quad B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$

und $\quad B_\varepsilon(x) \cap \mathbb{Q}^c \neq \emptyset$, daher

$\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$, $\quad \mathring{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \setminus \partial \mathbb{Q} = \emptyset$

$\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \partial \mathbb{Q} = \mathbb{R}$.