Konvergenz

Def 1.22 Sei X ein top. Raum. Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in X heißt **konvergent gegen $a\in X$** ("$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$", "$x_n \longrightarrow a$"), wenn gilt: Für jede Umg. U von a $\exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: x_n\in U$.

Bem Im metr. Raum X gilt

$$x_n \to a \iff \underbrace{d(x_n, a) \longrightarrow 0 \quad \text{in } \mathbb{R}}_{}, \text{ also}$$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n\geq N: d(x_n,a)<\varepsilon.$$

Bew: ÜA 13 Bl 3.

Bem In $(\mathbb{R}^m, d_{Eukl})$ gilt

$$x_n \longrightarrow a \iff \forall i\in\{1\dots m\}: \; x_{n,i} \longrightarrow a_i$$

Bew: ÜA 13.

Def 1.24 Sei X top. Raum und (x_n) Folge in X. $a\in X$ heißt ein **Häufungspunkt** von (x_n), wenn jede Umg. von a ∞ viele Folgenglieder enthält.

Bem Sei X metr. Raum, $x_n \to a$.

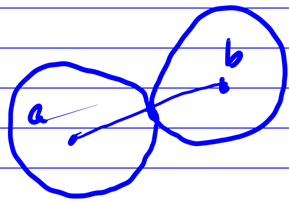
Dann $\{HPe\} = \{a\}$.

Insbes. $\nexists$ 2 Limiten.

Bew $a \in \{HPe\}$ weil in jeder Umg U von a fast alle x_n liegen, also ∞ viele

Gäbe es HP $b \neq a$, setze

$$\varepsilon := \frac{d(a,b)}{2}$$



dann $B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(b) = \emptyset$

(denn sonst $x \in B_\varepsilon(a) \cap B_\varepsilon(b)$

$$\Rightarrow d(a,b) \leq \underbrace{d(a,x)}_{<\varepsilon} + \underbrace{d(x,b)}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon = d(a,b) \ \lightning\ )$$

∞ viele x_n in $B_\varepsilon(b) \Rightarrow$ nicht fast alle x_n in $B_\varepsilon(a)$ $\lightning$ zu $x_n \to a$ $\square$

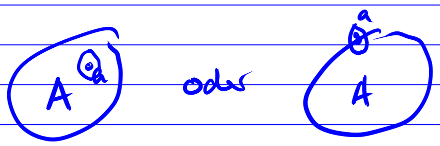
Satz 1.25 Sei X metr. Raum,
$A \subset X$, $a \in X$

Es gilt $a \in \bar{A} \iff \exists (x_n)$ in A: $x_n \to a$

Insbes. A abg $\iff$ für jede konv. Folge (x_n) mit $x_n \in A$ liegt der Limes in A.

Bew "$\Rightarrow$": Sei $a \in \bar{A}$. $\quad \bar{Y} = Y \cup \partial Y$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A \neq \emptyset$.



Wähle $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a) \cap A$.

Dann $x_n \in A$ und $0 \leq d(x_n, a) < \frac{1}{n} \longrightarrow 0$

also $x_n \to a$.

"$\Leftarrow$": Gelte $x_n \to a$, $\forall n \in \mathbb{N}: x_n \in A$.

Wäre $a \notin \bar{A}$, dann $a \in \underbrace{X \setminus \bar{A}}_{\text{offen}} =$ Umg. von a

$\Rightarrow$ fast alle $x_n \in X \setminus \bar{A}$ $\lightning$ zu $x_n \in A$ $\square$

Bem punktw. und glm. Konv.

$$f_n \to f$$

$$f_n, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} .$$

pktw. $\forall \varepsilon > 0 \; \forall x \in \mathbb{R} \; \exists N_{\varepsilon,x} \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N_{\varepsilon,x}$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

glm. $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \; \forall x \in \mathbb{R} \; \forall n \geq N_\varepsilon$:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon .$$

glm. Konv $=$ Konv. bzgl. $\|\cdot\|_\infty$

denn $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon \iff \forall x \in \mathbb{R}$:
$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

aber für pktw. Konv. $\nexists \; \|\cdot\|$

aber (ohne Bew) pktw. Konv. $\hat{=}$ Topologie auf $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$

nämlich $M \in \mathcal{T} \iff \exists M_i , i \in J$:
$M = \bigcup_{i \in J} M_i$ und

$\forall i \in J \; \exists x_1 \ldots x_k , a_1 \ldots a_k , b_1 \ldots b_k \in \mathbb{R}$:

$$M_i = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall j \in \{1 \ldots k\} : f(x_j) \in (a_j , b_j) \}$$