Cartesisches Produkt metrischer Räume

$X_1 \times X_2$ mit (X_1, d_1) und (X_2, d_2)
metr. Räume

Gewünscht: Metrik auf $X_1 \times X_2$.

Mögl.:

$$\tilde{d}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2)$$

oder

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2}.$$

Beh $d, \tilde{d}$ sind Metriken.

Bew $\tilde{d}$ leicht zu prüfen.

d Definitheit, Symmetrie leicht

Δ-Ungl.: $$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} d_1(x_1, y_1) \\ d_2(x_2, y_2) \end{pmatrix} \right\|_{2, \mathbb{R}^2}$$

ÜA 12a: Δ-Ungl für $\| \cdot \|_2$

$$d\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) = \left\| \begin{pmatrix} d_1(x_1, z_1) \\ d_2(x_2, z_2) \end{pmatrix} \right\|_{2, \mathbb{R}^2}$$

$$\boxed{d_1(x_1, z_1) \leq d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1)}$$

$$\leq \left\| \begin{pmatrix} d_1(x_1, y_1) + d_1(y_1, z_1) \\ d_2(x_2, y_2) + d_2(y_2, z_2) \end{pmatrix} \right\|_{2, \mathbb{R}^2}$$

$$\leq \left\| \begin{pmatrix} d_1(x_1, y_1) \\ d_2(x_2, y_2) \end{pmatrix} \right\|_{2,\mathbb{R}^2} + \left\| \begin{pmatrix} d_1(y_1, z_1) \\ d_2(y_2, z_2) \end{pmatrix} \right\|_{2,\mathbb{R}^2}$$

$$= d(x,y) + d(y,z) \qquad \square$$

$X_1 \times X_2$

Bch $x_\nu \xrightarrow{\nu\to\infty} a$ in $(X_1 \times X_2, \tilde{d})$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_{\nu 1} \to a_1 & \text{in } (X_1, d_1) \\ x_{\nu 2} \to a_2 & \text{in } (X_2, d_2). \end{cases}$$

Bew $\tilde{d}$: "$\Leftarrow$": $\tilde{d}(x_\nu, a) =$

$$\underbrace{d_1(x_{\nu 1}, a_1)}_{\to 0} + \underbrace{d_2(x_{\nu 2}, a_2)}_{\to 0} \to 0.$$

"$\Rightarrow$": $0 \leq \underbrace{d_i(x_{\nu i}, a_i)}_{\to 0} \leq \tilde{d}(x_\nu, a) \to 0$

also

d: analog zu ÜA 13 b). $\qquad \square$