# Vollständige metr. Räume

**Def** Sei $X$ metr. Raum. Eine Folge $(x_n)$ in $X$ heißt Cauchyfolge, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N : d(x_n, x_m) < \varepsilon .$$

**Bem** Das lässt sich in top. Raum nicht definieren.

**Prop 1.27** Sei $(x_n)$ Folge im metr. Raum $X$

$(x_n)$ konv. $\Rightarrow$ $(x_n)$ ist Cauchyfolge.

**Beweis** Sei $a := \lim x_n$, dann

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : d(x_n, a) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Daher $\forall n, m \geq N$

$$d(x_n, x_m) \overset{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \underbrace{d(x_n, a)}_{< \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(a, x_m)}_{d(x_m, a) < \frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon . \quad \square$$

**Def 1.28**

a) Ein metr. Raum heißt vollständig, wenn in ihm jede Cauchyfolge konv.

b) Ein vollst. normierter Raum $(V, \|\cdot\|)$ heißt Banachraum.

**Prop** $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ ist vollst.

**Bew** Sei $(x_\nu)$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}^n$.
Wegen $|x_{\nu i} - x_{\mu i}| \leq d(x_\nu, x_\mu)$
ist $(x_{\nu i})_{\nu \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$,
für jedes $i \in \{1 \dots n\}$. Also (Ana 1)
$x_{\nu i} \longrightarrow a_i$. Also $x_\nu \to a \in \mathbb{R}^n$. $\square$

**Prop** Sei $(X, d)$ vollst., $Y \subset X$.
$(Y, d_{ind})$ ist genau dann vollst.,
wenn $Y$ abg.

**Bew** "$\Rightarrow$": Sei $(Y, d_{ind})$ vollst.,
$(y_n)$ in $Y$, $y_n \to a$ in $X$. (Zeige: $\underline{\underline{a \in Y}}$)
Dann ist $(y_n)$ Cauchyfolge in $X$
$\Rightarrow$ $(y_n)$ Cauchyfolge in $Y$.
$\Rightarrow$ $(y_n)$ konv. in $Y$ $\Rightarrow$ $y_n \to y \in Y$
$\Rightarrow$ $y_n \to y$ in $X$ $\Rightarrow$ $y = a \in Y$.

"$\Leftarrow$": Sei $\underline{Y \text{ abg.}}$, $(y_n)$ in $Y$ Cauchyfolge
$\Rightarrow$ $(y_n)$ Cauchyfolge in $X$ $\Rightarrow$ konv. in $X$,
$y_n \to a$ $\Rightarrow$ $a \in Y$, $y_n \to a$ in $Y$. $\square$

**Bem** Tats.: auch wenn $X$ nicht
vollst., gilt für $Y \subset X$:
$(Y, d_{ind})$ vollst. $\Rightarrow$ $Y$ abg.

**Bsp** Seien $C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \}$

$\mathcal{P}[a,b] = \{ p : [a,b] \to \mathbb{R} \mid p \text{ Poly} \} \subset C[a,b]$.

Jedes $f \in C[a,b]$ ist beschr., also $\exists \|f\|_\infty$

**Beh 2.20** $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ ist vollst.,

$(\mathcal{P}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ nicht.

**Bew** $C[a,b]$: Sei $(f_n)$ Cauchyfolge in $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$. Stets $|g(x)| \le \|g\|_\infty$ $\forall x \in [a,b]$, also

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

also ist $(f_n(x))$ Cauchyfolge in $\mathbb{R}$,

also $f_n(x) \longrightarrow f(x)$.

Wenn $\forall m,n \geq N$: $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$, dann

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$
$$\Big\downarrow m \to \infty$$
$$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$$

also $\|f_n - f\|_\infty \le \varepsilon$, ~~also~~ $\forall n \geq N$, also $f_n \to f$ glm.

Ana 1: glm. Limes stetiger Fktnen ist stetig.

Also: $f$ stetig. Also $f_n \to f \in C[a,b]$ in $\|\cdot\|_\infty$.

$\mathcal{P}[a,b]$: $\quad p_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\nu} x^k$ ist Poly

$$p_\nu \xrightarrow{\nu \to \infty} f, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

glm. auf $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ $\qquad$ kein Poly

denn: Potenzreihen konv. glm. auf Kompakta innerhalb des Konvkreises. $\square$

Merke "In einem Banachraum kann man addieren, vervielfachen, Betrag und Limiten nehmen."