# Äquivalente Normen

**Def 1.30** 2 Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ auf $V$ heißen *äquivalent*, wenn

$$\exists c, C > 0 \ \forall x \in V: \quad c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq C\|x\|_a$$

**Bem 1.31** Ist Äq.rel.

**Prop 1.32** Seien $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ äq. Normen auf $V$. Für jedes $U \subset V$, jede Folge $(x_n)$ in $V$, $\forall y \in V$:

a) $U$ ist offen in $(V, \|\cdot\|_a) \Leftrightarrow U$ ist offen in $(V, \|\cdot\|_b)$

b) abg. $\Leftrightarrow$ abg.

c) $x_n \to y$ in $(V, \|\cdot\|_a) \Leftrightarrow x_n \to y$ in $(V, \|\cdot\|_b)$

d) $(x_n)$ ist Cauchy $(V, \|\cdot\|_a) \Leftrightarrow (x_n)$ ist Cauchy in $(V, \|\cdot\|_b)$

e) $(V, \|\cdot\|_a)$ vollst. $\Leftrightarrow (V, \|\cdot\|_b)$ vollst.

**Beweis** a) $\underbrace{B^a_\varepsilon(x_0) \supset B^b_{c\varepsilon}(x_0)}$

$$\|x\|_b < c\varepsilon \Rightarrow \|x\|_a \leq \frac{1}{c}\|x\|_b < \varepsilon$$

und $\underbrace{B^b_\varepsilon(x_0) \supset B^a_{\varepsilon/C}(x_0)}$

$$\|x\|_a < \frac{\varepsilon}{C} \Rightarrow \|x\|_b \leq C\|x\|_a < \varepsilon$$

b) folgt aus a)

c) $x_n \to y$ in $(V, \|\cdot\|_a) \Rightarrow \|x_n - y\|_a \to 0$

$\Rightarrow \|x_n - y\|_b \leq C\|x_n - y\|_a \to 0$

d) so ähnlich

e) folgt aus c) und d). $\square$