Kap. 2: Stetigkeit

Notation Für $f: A \to B$ und $U \subset A$

sei $f(U) := \{ f(a) \mid a \in U \} \subset B$.

Def 2.1 Seien X, Y top. Räume, $a \in X$.

$f: X \to Y$ heißt **folgenstetig in a**, wenn für jede Folge (x_n) in X mit $x_n \to a$ gilt

$f(x_n) \to f(a)$ in Y.

f heißt **folgenstetig**, wenn f in jedem $a \in X$ folgenstetig ist.

Notation 2.2 " $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ " $:\Leftrightarrow$

für jede Folge (x_n) in $X \setminus \{a\}$ mit $x_n \to a$ gilt $f(x_n) \to b$ in Y.

Folgerung f folgenst. in a $\Leftrightarrow$

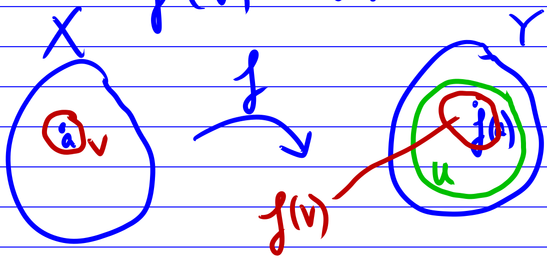
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Bew "$\Rightarrow$": klar (Folge in $X \setminus \{a\}$ ist Folge in X).

„$\Leftarrow$": geg. Folge (x_n) in X,
entferne Folgenglieder $x_k = a$.
erhalte Folge $(\tilde{x}_n)$ in $X \setminus \{a\}$,
$\tilde{x}_n \to a$, Vor $\Rightarrow f(\tilde{x}_n) \to f(a)$,
wird nicht zerstört durch
eingefügte $f(a)$, also $f(x_n) \to f(a)$

$\Rightarrow f$ folgenst. in a. $\square$

<u>Def 2.3</u> Seien X, Y top. Räume, $a \in X$.
$f: X \to Y$ heißt <u>stetig in a</u>, wenn
$\forall$ Umg. U von $f(a)$ $\exists$ Umg. V von a:
$f(V) \subset U$.



$f: X \to Y$ heißt <u>stetig</u>, wenn sie in jedem Pkt stetig ist.

Prop 2.4 stetig in a $\Rightarrow$ folgenst. in a
stetig $\Rightarrow$ folgenst.

Bew Sei (x_n) in X mit $x_n \to a$.
Zu zeigen: jede Umg. U von $f(a)$
enth. fast alle $f(x_n)$.
f st. in a $\Rightarrow$ $\exists$ Umg. V von a: $f(V) \subset U$.
Wegen ~~$f(x_n) \to$~~ $x_n \to a$ liegen fast
alle x_n in V, also fast alle $f(x_n)$ in U,
also $f(x_n) \to f(a)$. $\square$

Prop 2.5 Seien X, Y metr. Räume, $a \in X$.
$f: X \to Y$ stetig in a $\Leftrightarrow$
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x \in X$: wenn $d(x,a) < \delta$,
dann $d(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

Bew "$\Rightarrow$": Für $U := B_\varepsilon(f(a))$
$\exists V$ Umg. a: $f(V) \subset U$.
Umg $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$: $B_\delta(a) \subset V$.
Also $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a))$.
"$\Leftarrow$": geg. U Umg. von $f(a)$,
$\exists \varepsilon > 0$: $B_\varepsilon(f(a)) \subset U$
Vor $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$: $f(B_\delta(a)) \subset B_\varepsilon(f(a)) \subset U$
Setze $V := B_\delta(a)$. $\square$

Prop 2.6 Seien X, Y metr. Räume, $a \in X$, $f: X \to Y$.

folgenst. in a $\Longrightarrow$ stetig in a.

Bew Wäre f nicht stetig in a, dann $\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0: \ f(B_\delta(a)) \not\subset B_\varepsilon(f(a))$

Setze $\delta = \frac{1}{n}$, wähle $x_n \in B_{\frac{1}{n}}(a)$ mit $f(x_n) \notin B_\varepsilon(f(a))$. Dann $x_n \to a$, aber $f(x_n) \not\to f(a)$. ↯ $\square$

Satz 2.7 Seien X, Y top. Räume, $f: X \to Y$

f stetig $\Longleftrightarrow$ $\forall M \subset Y$ offen: $\underbrace{f^{-1}(M)}_{:= \{x \in X \mid f(x) \in M\}}$ ist offen in X

Bew "$\Longrightarrow$": Sei $M \subset Y$ offen, $a \in f^{-1}(M)$.
Dann $f(a) \in M \overset{f \text{ st.}}{\Longrightarrow} \exists$ Umg V von a: $f(V) \subset M$. Also $V \subset f^{-1}(M)$.
Also ist a innerer Pkt von $f^{-1}(M)$, a bel $\Rightarrow f^{-1}(M)$ offen.

"$\Leftarrow$": Sei $a \in X$, U Umg von $f(a)$.

$\exists M$ offen : $f(a) \in M$ und $M \subset U$.

Setze $V := f^{-1}(M)$.

Vor $\Rightarrow$ V offen; $a \in V$; $f(V) = M \subset U$. $\square$