Bspe 2.8

a) (X,d), $b \in X$. $d_b(x) := d(x,b)$.

$d_b : X \to [0,\infty)$ ist stetig.

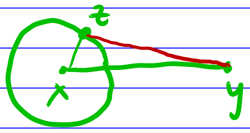
Bew Vorüberlegung:

$$d(x,y) \le d(y,z) + d(z,x)$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow d(x,y) - d(z,x) \le d(y,z) \\ \overset{y \leftrightarrow z}{\Rightarrow} d(x,z) - d(y,x) \le d(y,z) \end{array}\right\}$$

$$|d(x,y) - d(x,z)| \le d(y,z)$$

"umgekehrte Δ-Ungl."



Jetzt: $x_n \to a \in X$, dann

$$|d_b(x_n) - d_b(a)| = |d(b,x_n) - d(b,a)|$$

$$\le d(x_n,a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also $d_b(x_n) \to d_b(a)$, also d_b folgenst. □

b) In $(V, \|\cdot\|)$ normierten Raum ist

$\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ stetig.

(Folgt aus a) für $b = 0 \in V$.)

c) norm. Raum $(V, \|\cdot\|)$

add: $V \times V \to V$, $(x,y) \mapsto x+y$

mult: $\mathbb{K} \times V \to V$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha x$

sind stetig bzgl. $\|(x,y)\|_{V\times V} := \sqrt{\|x\|_V^2 + \|y\|_V^2}$

und $\|(\alpha, x)\|_{\mathbb{K}\times V} := \sqrt{|\alpha|^2 + \|x\|_V^2}$

<u>Bew</u> $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow x_n \to x$ und $y_n \to y$.

$$\Rightarrow \quad \|add(x_n, y_n) - add(x,y)\|_V$$

$$= \| x_n + y_n - x - y \|_V$$

$$\le \| x_n - x\|_V + \|y_n - y\|_V \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Prop. 2.6. $\Rightarrow$ add st.

mult: $(\alpha_n, x_n) \to (\alpha, x)$ in $\mathbb{K} \times V$,

dann $\alpha_n \to \alpha$ in $\mathbb{K}$, $x_n \to x$ in V

$$\| mult(\alpha_n, x_n) - mult(\alpha, x)\|_V$$

$$= \| \alpha_n x_n - \alpha x\|_V$$

$$\le \| \alpha_n x_n - \alpha x_n\|_V + \|\alpha x_n - \alpha x\|_V$$

$$= \underbrace{|\alpha_n - \alpha|}_{\to 0} \underbrace{\|x_n\|_V}_{\text{beschr.}} + |\alpha| \underbrace{\|x_n - x\|_V}_{\to 0} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Prop. 2.6 $\Rightarrow$ mult. st. □

d) Wenn $f: Y \to Z$ und $g: X \to Y$ beide st. X, Y, Z top. Räume, dann

$$f \circ g : X \to Z \quad \text{st.}$$

Bew (Satz 2.7) $M \subset Z$ offen

$$\overset{f \text{ st.}}{\Longrightarrow} \quad f^{-1}(M) \subset Y \text{ offen}$$

$$\overset{g \text{ st.}}{\Longrightarrow} \quad \underbrace{g^{-1}(f^{-1}(M))}_{(f \circ g)^{-1}(M)} \subset X \text{ offen} \qquad \square$$

e) Seien $(X_0, d_0), (X_1, d_1) \dots (X_n, d_n)$ metr. Räume, $f: X_0 \to \underbrace{X_1 \times \dots \times X_n}_{d = \sqrt{d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2}}$

$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$

ist st. $\Longleftrightarrow$ alle $f_i : X_0 \to X_i$ st.

Bew Ü13b) verallg.: y_ν in $X_1 \times \dots \times X_n$

$$y_\nu \xrightarrow{\nu \to \infty} a \Longleftrightarrow \forall i \in \{1..n\}: y_{\nu i} \xrightarrow{\nu \to \infty} a_i$$

Wenn $x_\nu \to x$ in X, dann

$$y_\nu := f(x_\nu) \longrightarrow f(x) \Longleftrightarrow \forall i \; y_{\nu i} = f_i(x_\nu) \longrightarrow f_i(x) \quad \square$$

f) Wenn $f,g: X \to V \overset{\text{st.}}{,}$ $h: X \to \mathbb{K}$ st.

metr. ~~metr.~~ Raum   norm. Raum

~~top.~~

dann $f+g$ und $hg: X \to V$ st.

<u>Bew</u> $f+g = \text{add} \circ \underbrace{(f,g)}_{X \to V \times V}$

$hg = \text{mult} \circ (h,g)$

e), d), c) $\Rightarrow$ Beh. □

g) <u>Def</u> $f: X \to Y$ (metr. Räume) heißt <u>dehnungsbeschränkt</u> oder <u>Lipschitz-stetig</u>, wenn

$\exists L \in [0,\infty) ; \ \forall x_1, x_2 \in X:$

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) \le L \, d_X(x_1, x_2).$$

<u>Beh</u> Jede Lipschitz-stetige Fkt ist stetig (ÜA), aber nicht umgek.

h) top. Räume X, Y, $f: X \to Y$

folgenst. aber nicht st.

$Y = (\mathbb{R}, |\cdot|_{Eukl})$

$X = \mathbb{R}$ mit $U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow U^c$ abzählbar.

„co-abzählbare Topologie“

[$x_n \to x \Leftrightarrow x_n = x$ für fast alle n]

$f(x) = x$.

folgenst., denn $x_n \xrightarrow{X} x \Rightarrow x_n \xrightarrow{Y} x$.

Nicht st., denn $f^{-1}((0,1)) = (0,1) \notin \mathcal{T}$.