Homöomorph

Def 2.9 a) top. R.e X, Y heißen homöomorph falls $\exists$ Bij $f: X \to Y$, f st., f^{-1} st.

f heißt dann Homöomorphismus.

[f bildet konv. Folgen auf konv. Folgen ab]

b) mtr. R.e X, Y isometrisch wenn $\exists$ Bij $f: X \to Y$, $d(f(a), f(b)) = d(a, b)$.

c) norm. R.e X, Y heißen isometrisch isomorph, falls $\exists$ Bij $f: X \to Y$, f linear, Isometrie d.h.

$$\|f(v)\|_Y = \|v\|_X \quad \forall v \in X$$

Bem 2.10

a) isom. isomorph $\Rightarrow$ isometr. $\Rightarrow$ homöomorph

norm. R.   mtr. R.   top. R.

b) s.o.

c) bij. Isometrie f bildet Cauchyfolgen auf Cauchyfolgen ab.

d) (X, d_X) isometrisch zu (Y, d_Y).

X vollst. $\Leftrightarrow$ Y vollst.

Bsp 2.12 b $\mathbb{C}^n$: $d(z,w) = \left(\sum_{j=1}^{n} |z_j - w_j|^2 \right)^{1/2}$.

$\mathbb{C}^n$ isometrisch zu $\mathbb{R}^{2n}$

$J : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n} : z \mapsto (\operatorname{Re} z_1, \operatorname{Im} z_1, \dots, \operatorname{Re} z_n, \operatorname{Im} z_n)$

ist bij. Isometrie.

Äq. Normen

Satz 2.13 Auf jedem endl.-dim VR V über $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ sind alle Normen äq.

Beweis: Skript.

Koroller 2.15 Jeder endl.-dim VR V über $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ ist bzgl. jeder Norm vollst.

Beweis Wähle Basis in V, liefert Isomorph. $A : V \to \mathbb{R}^n$, def $\| \cdot \|_A$ auf $\mathbb{R}^n$ durch $\|v\|_A = \|A^{-1} v\|_V$. $\| \cdot \|_A$ äq. zu $\| \cdot \|_2$, $\mathbb{R}^n$ ist vollst. bzgl. $\| \cdot \|_2$. $\square$

glm. Konv.

Def 2.16 Sei X eine Menge, Y metr. Raum, $f_n, f : X \to Y$

a) $f_n \to f$ punktweise $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \forall x \in X \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall n \geq N : \quad d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon .$$

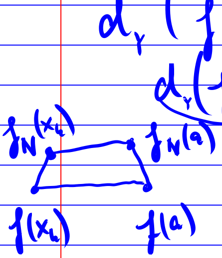
b) $f_n \to f$ glm. $\Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall x \in X \ \forall n \geq N : \quad d_Y(f_n(x), f(x)) < \varepsilon .$$

Satz 2.18 Sei X auch metr. Raum, jedes f_n st., $f_n \to f$ glm.
Dann ist f st.

Beweis: Sei $x_k \xrightarrow{k \to \infty} a$ in X.
Zu zeigen: $f(x_k) \to f(a)$ in Y.
Sei $\varepsilon > 0$. $f_n \to f$ glm $\Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} \ \forall x : d_Y(f_N(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$
f_N st. $\Rightarrow \exists K \in \mathbb{N} \ \forall k \geq K : d_Y(f_N(x_k), f_N(a)) < \frac{\varepsilon}{3}$

$$d_Y(f(x_k), f(a)) \leq \underbrace{\underbrace{d_Y(f(x_k), f_N(x_k))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d_Y(f_N(x_k), f_N(a))}_{< \frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{d_Y(f_N(a), f(a))}_{< \frac{\varepsilon}{3}}}_{< \varepsilon}$$



$\square$

Korollar 2.20 Sei (X,d) metr. R.
$(Y, \|\cdot\|)$ Banachraum,

$$C(X,Y) = \{ f : X \to Y \mid f \text{ st. und beschr.} \}.$$

Dann ist $(C(X,Y), \|\cdot\|_\infty)$ ist vollst.

Bew analog zu $C([a,b], \mathbb{R})$. $\square$