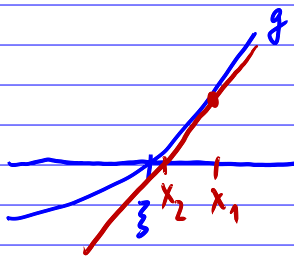
Fixpunktsatz von Banach

- verallg.

Newton-Verfahren



Picard-Verfahren

- verwendet Lipschitz-Bed, vollst.
- betrifft Iterationsfolgen

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_1 \text{ geg.}$$

wissen: wenn $\exists \lim x_n =: a$
und f st., dann

$$\underline{a} = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n)$$
$$= f(\lim x_n) = \underline{f(a)}$$

(Fixpunkt)

2.22 Fixpunktsatz von Banach (1922)

Stefan Banach (1892 – 1945)

Sei (X, d) vollst. metr. Raum,

$f: X \to X$ eine Kontraktion,

d.h. $\exists \theta \in (0,1)\ \forall x, y \in X$:

$$d(f(x), f(y)) \leq \theta\, d(x, y).$$

Dann hat f genau einen Fixpunkt $a \in X$, d.h. $f(a) = a$, und jede Iterationsfolge konv. gegen a.

$$x_{n+1} = f(x_n), \quad x_1 \in X \text{ bel.}$$

Korollar Wenn $A \subset X$, A abg., X vollst., $f: A \to A$ Kontraktion, dann $\exists_1$ Fixpunkt $a \in A$.

Bew Eind.: Wenn $f(a) = a$ und $f(b) = b$, dann

$$d(a,b) = d(f(a), f(b)) \leq \theta\, d(a,b)$$

$$\Rightarrow d(a,b) < d(a,b)$$

oder $d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$.

Existenz: Sei $x_0 \in X$ bel.,

Iterationsfolge $x_{n+1} = f(x_n)$

Wenn $x_n \to a$, dann (weil f Lipschitz-st $\Rightarrow$ st.)

$\underline{a} = \lim x_{n+1} = \lim f(x_n) =$

$= \underline{f(a)}$.

Zeige: (x_n) Cauchyfolge.

1) (x_n) beschr.

$$d(x_n, x_0) \leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots$$
$$\dots + d(x_1, x_0)$$
$$\leq \vartheta\, d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \dots$$
$$\leq \vartheta^{n-1} d(x_1, x_0) + \vartheta^{n-2} d(x_1, x_0) +$$
$$\dots + d(x_1, x_0)$$
$$= (\vartheta^{n-1} + \vartheta^{n-2} + \dots + 1)\, d(x_1, x_0)$$
$$\leq \frac{1}{1-\vartheta}\, d(x_1, x_0) =: M$$

2) Daher $d(x_m, x_n) \leq 2M \quad \forall m, n \in \mathbb{N}$.

3) Sei $\varepsilon > 0$, $n, m \geq n_0$

$$d(x_n, x_m) = d(f(x_{n-1}), f(x_{m-1}))$$
$$\leq \vartheta\, d(x_{n-1}, x_{m-1})$$
$$\leq \vartheta^{n_0} d(x_{n-n_0}, x_{m-n_0})$$
$$\leq \vartheta^{n_0} 2M < \varepsilon$$

für $n_0 = n_0(\varepsilon, M)$ groß genug

$$n_0 > \frac{\log \varepsilon - \log(2M)}{\log \vartheta}$$

$\square$