Kap. 3: Kompaktheit

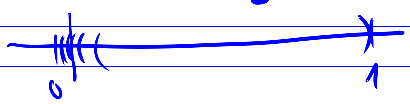
Def 3.1 Sei X top. R., $Y \subset X$.

a) Eine Familie $U_i \subset X$, $i \in J$, heißt *offene Überdeckung von Y*, wenn jedes U_i offen ist und
$Y \subset \bigcup_{i \in J} U_i$.

b) $K \subset X$ heißt *kompakt*, wenn gilt:
Zu jeder offenen Üb. $(U_i)_{i \in J}$ von K
$\exists$ endl. Teilüb. von K, d.h.
$\exists\, i_1, \dots, i_n \in J : K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$.

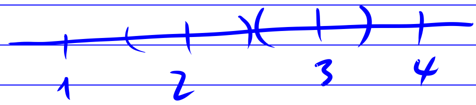
Bspe 3.2 a) Jede endl. Teilmenge
$K = \{x_1, .., x_n\} \subset X$ ist kompakt.

b) $(0,1) \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt:
$(0,1) = \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n}, 1\right)$ besitzt keine endl. Teilüb.



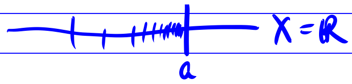
c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ist nicht kompakt:

$$\mathbb{N} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(n-\tfrac{1}{2}, n+\tfrac{1}{2}\right), \quad \nexists \text{ endl. Teilüb.}$$



d) $x_n \to a$ in X; dann ist

$K = \{x_n \mid n \in \mathbb{R}\} \cup \{a\} \subset X$ kompakt.



__Bew__ Sei $(U_i)_{i \in J}$ offene Üb. von K.

Wähle i_0: $a \in U_{i_0}$. Fast alle $x_n \in U_{i_0}$,

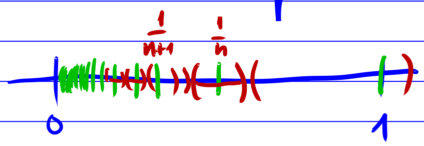
die übrigen in endl. vielen $U_{i_1} .. U_{i_m}$

also $U_{i_0}, U_{i_1} .. U_{i_m}$ endl. Teilüb. $\square$

e) Ohne a, i. allg. nicht kompakt,

z.B. $Y = \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$

nicht kompakt



$$Y \subset \left(\tfrac{3}{4}, 2\right) \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right), \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right)\right)$$

$\nexists$ endl. Teilüb.