3.3 Satz von Bolzano-Weierstraß

Sei X top. Raum, $K \subset X$ kompakt.
Jede Folge in K hat einen HP.

Bew Sei $x_n \in K$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
Zu zeigen: $\exists a \in K$ $\forall$ Umg U von a:
U enth. ∞-viele x_n.

Gäbe es keinen HP, dann
$\forall a \in K$ $\exists$ offene Umg U_a von a:
U_a enth. nur endl. viele x_n.

off. Üb: $(U_a)_{a \in K}$
Klar: $K \subset \bigcup_{a \in K} U_a$

K kompakt $\Rightarrow$ $\exists a_1 \ldots a_n \in K$:
$K \subset U_{a_1} \cup \ldots \cup U_{a_n}$.
$\Rightarrow$ K enth. nur endl. viele x_n ↯ □

Bem 3.4 (ohne Bew)
Sei $K \subset X$ metr. Raum. Wenn jede Folge in K einen HP in K hat, dann ist K kompakt.

Satz 3.5 Seien X, Y top. R.e, $f: X \to Y$ st.

Wenn $K \subset X$ kompakt, dann ist auch $\underbrace{f(K)}_{\{f(x) : x \in K\}}$ kompakt.

Bew Sei $f(K) \subset \bigcup_{i \in J} V_i$ offene Üb.

$\overset{f \text{ st.}}{\Longrightarrow} U_i := f^{-1}(V_i)$ offen in X

$K \subset \bigcup_{i \in J} U_i \overset{K \text{ komp}}{\Longrightarrow} \exists$ endl. Teilüb.

$$K \subset U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_n}$$

$$\Longrightarrow \quad f(K) \subset f(U_{i_1}) \cup \dots \cup f(U_{i_n})$$
$$= V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n} \qquad \square$$