Def 3.6 Sei X metr. R.,

a) $B \subset X$ heißt <u>beschränkt</u>, wenn
$$\exists C \in \mathbb{R}\ \forall x,y \in B: d(x,y) \le C.$$

b) Der <u>Durchmesser</u> von $Y \subset X$ ist
$$\operatorname{diam}(Y) := \sup \{ d(x,y) \mid x,y \in Y \} \in [0,\infty]$$

<u>Bem</u> a) Äq sind: (i) B beschr.

(ii) $\forall x_0 \in X\ \exists r > 0: B \subset B_r(x_0)$

(iii) $\exists x_0 \in X\ \exists r > 0: B \subset B_r(x_0)$.

<u>Bew</u> (i)$\Rightarrow$(ii): Wenn $B = \emptyset$ klar

Wenn $B \neq \emptyset$, wähle $x \in B$, setze
$$r := C + d(x, x_0) + 1$$
$$\forall y \in B: \quad d(y, x_0) \le d(x_0, x) + d(y,x)$$
$$\le d(x_0,x) + C < r$$

(ii)$\Rightarrow$(iii) klar

(iii)$\Rightarrow$(i): setze $C = 2r$
$$\forall x,y \in B: d(x,y) \le d(x,x_0) + d(y,x_0)$$
$$< r + r = C \qquad \square$$

b) B beschr $\Leftrightarrow \operatorname{diam}(B) < \infty$

c) Sei V norm. R., $B \subset V$ beschr

$\Longleftrightarrow \quad \sup_{v \in B} \|v\| < \infty$.

Bew: a) (iii) mit $x_0 = 0$

$r := \sup_{v \in B} \|v\| + 1$ $\square$

3.10 Satz von Heine-Borel

$K \subset \mathbb{R}^n$ kompakt $\Longleftrightarrow$ K abg. und beschr.

3.11 Korollar Sei V endl.-dim norm. R. $K \subset V$ komp $\Leftrightarrow$ K abg. und beschr.

3.7 Satz Sei X metr. R.
Wenn $K \subset X$ komp., dann ist K abg. und beschr.

Bew beschr: Sei $p \in X$ bel. aber fest

$U_n := B_n(p)$ offene Üb. von K (sogar von X)

$\overset{K \text{ komp}}{\Longrightarrow} K \subset U_1 \cup \dots \cup U_{n_0} = U_{n_0}$

$= B_{n_0}(p) \Rightarrow$ beschr.

abg: $x_n \to a \in X$, $x_n \in K$.

B-W $\Rightarrow \exists$ HP $b \in K$

$\Rightarrow b = a \Rightarrow a \in K$. $\square$

Bsp In ∞-dim. norm. R. X kann es sein, dass $M \subset X$ abg., beschr. aber nicht komp ist.

$X = \{$ beschr. Folgen (x_n) in $\mathbb{R}\}$

$$\|(x_n)\| := \|(x_n)\|_\infty = \sup_{n=1}^{\infty} |x_n|$$

$$M := \overline{B_1(0)} = \{(x_n) \in X \mid \|(x_n)\| \leq 1\}$$

$$(a_n) = (1, 0, 0, 0, 0 \ldots)$$
$$(b_n) = (0, 1, 0, 0, 0 \ldots)$$
$$(c_n) = (0, 0, 1, 0, 0 \ldots)$$
$$\vdots$$

Folge in M ohne HP

$\overset{B-W}{\Longrightarrow}$ M nicht komp.

Prop 3.9 Sei X top. R., $K \subset X$ komp., $A \subset K$ abg. Dann ist A komp.

Bew Sei $(U_i)_{i \in J}$ offene Üb. von A.

Füge $U := X \setminus A$ (offen) hinzu, $(U \cup U_i)_{i \in J}$ offene Üb von K (sogar von X)

$\overset{K \text{ komp}}{\Longrightarrow}$ $K \subset U \cup U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$

$\overset{A \subset K \setminus U}{\Longrightarrow}$ $A \subset U_{i_1} \cup \ldots \cup U_{i_n}$. $\square$

Prop. 3.12 (Schachtelungsprinzip)

Sei X vollst. metr. R., $\emptyset \neq A_n \subset X$ abg. $\forall n \in \mathbb{N}$

$A_{n+1} \subset A_n$, $\operatorname{diam}(A_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Dann $\exists_1\, a \in X$: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{a\}$.

Bew Eind: Seien $a, b \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann

$d(a,b) \leq \operatorname{diam}(A_n) \longrightarrow 0$

$\Rightarrow d(a,b) = 0 \Rightarrow a = b$.

Ex Wähle $x_n \in A_n$. (x_n) ist Cauchyfolge.

Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $\operatorname{diam}(A_{n_0}) < \varepsilon$

Dann $\forall n, m \geq n_0$: $d(x_n, x_m) < \varepsilon$

weil $x_n, x_m \in A_{n_0}$

$x_n \in A_n \subset A_{n-1} \subset \ldots \subset A_{n_0}$

X vollst $\Rightarrow$ $x_n \longrightarrow a \in X$. Da $\forall k \geq n$: $x_k \in A_n$

und A_n abg., gilt $a \in A_n$, also

$a \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$. $\square$

Satz 3.13 Sei $R > 0$.

$$W_R := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \underbrace{\|x\|_\infty}_{\max_{i=1}^{n} |x_i|} \le R \}$$

$\cancel{=}$

$= [-R, R]^n$ ist kompakt.

Bew s. Skript benutzt 3.12.

Beweis des Satzes von Heine-Borel

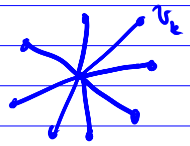
(Komp $\Leftrightarrow$ abg. und beschr.)

"$\Rightarrow$": Satz 3.7 in metr. R. en

"$\Leftarrow$": Sei $K \subset \mathbb{R}^n$ abg. und beschr.

Dann $\exists R > 0 : K \subset W_R$.

3.13: W_R komp., $\overset{3.9}{\Longrightarrow}$ K komp. $\square$

Bsp $X =$  $\subset \mathbb{R}^n$

("franz. Eisenbahn") $d =$ Entf. entlang X

$\neq d_{ind}$

$$X = \bigcup_{k \in K} \{ s v_k \mid 0 \le s \le 1 \}, \quad \|v_k\| = 1 \text{ in } \mathbb{R}^n$$

Beh X komp $\Leftrightarrow$ K endl.

"$\Leftarrow$": Jede Strecke ist komp.

$\Rightarrow \bigcup_{\text{endl.}}$ Kompakte $=$ komp.

"$\Rightarrow$": Wenn K unendl., dann ist

$$X \subset U_0 \cup \bigcup_{k \in K} U_k, \quad U_0 = X \cap B_{\frac{1}{2}}(0)$$

$$U_k = \{ s v_k \mid \tfrac{1}{3} < s \leq 1 \}$$

offene Üb. von X ohne endl. Teilüb. $\square$