

3.14 Satz von Weierstraß

Sei X top. R., $\emptyset \neq K \subset X$ kompakt,
 $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ st., dann nimmt f
Max und Min an, d.h.

$$\exists a \in K: f(a) = \sup_{y \in K} f(y)$$

$$\exists b \in K: f(b) = \inf_{y \in K} f(y).$$

Bew Sei $c := \sup_{y \in K} f(y) \in (-\infty, \infty]$.

$$\Rightarrow \exists (x_n) \text{ in } K: f(x_n) \rightarrow c.$$

K komp

$$\Rightarrow \exists \text{HP } a$$

B-W

Beh a HP von (x_n) , f st.

$$\Rightarrow f(a) \text{ HP von } (f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$$

Bew: \forall Umgebung U von $f(a)$:

$$\exists \text{Umgebung } V \text{ von } a: f(V) \subset U$$

$$a \text{ HP} \Rightarrow \infty\text{-viele } x_n \text{ in } V$$

$$\Rightarrow f(x_n) \in U \text{ (}\infty\text{-viele)} \quad \square$$

$$\text{Hier} \Rightarrow f(a) \text{ HP von } (f(x_n))$$

$$\Rightarrow f(a) = c \in \mathbb{R}$$

Analog für inf. □