Kap. 4: Differenzierbarkeit

Hatten $\frac{\partial^m f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_m}}$ für $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

ex. auch für $f: \mathbb{R}^n \to W$

$(W, \|\cdot\|)$ norm. R.

und für $f: G \to W$

Notation $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet

Nabla-Operator $\nabla = (\partial_1, \dots, \partial_n)$

$\operatorname{grad} f = \nabla f$

Für $f: G \to \mathbb{R}$ Skalarfeld,

ist $\nabla f: G \to \mathbb{R}^n$ Vektorfeld

Def 4.10a) Ist $g: \mathbb{R}^n \supset G \to \mathbb{R}^n$

partiell diffbar, so heißt

$$\operatorname{div} g := \nabla \cdot g := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_j}{\partial x_j}$$

die Divergenz von g.

b) Ist $g = \operatorname{grad} f$, so schreibt man

$$\Delta f := \operatorname{div} \operatorname{grad} f := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}$$

Δ = Laplace-Operator.

Bsp 4.7 $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ rotationssymm.

also $f(\underline{x}) = h(\|\underline{x}\|)$, $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$.

Mit $r(\underline{x}) := \|\underline{x}\|$, $f = h \circ r$

$$\partial_j f = \partial_j (h \circ r) = h'(\|\underline{x}\|)\, \partial_j r$$

$$\partial_j r = \partial_j \left(\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{1/2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_k x_k^2 \right)^{-1/2} 2x_j$$

$$= \frac{x_j}{\|\underline{x}\|}.$$

$$\nabla r = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|} = \underline{e}_r$$

Also: $\nabla f = h'(\|\underline{x}\|)\, \underline{e}_r$.

Bsp 4.11 a) $\underline{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{x}$
VF

Divergenz $\nabla \cdot \underline{f} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\partial f_j}{\partial x_j}}_{1} = n$

b) $\underline{f}(\underline{x}) = \underline{e}_r = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$, $\underline{f} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$
partiell diffbar

$$\nabla \cdot \underline{f} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{x_j}{\|\underline{x}\|} \right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\|x\|} - x_j \frac{1}{\cancel{2}} \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \right)^{-3/2} \cancel{2} x_j \right)$$

$$= \frac{n}{\|x\|} - \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}{\left(\sum_k x_k^2 \right)^{3/2}} = \frac{n}{\|x\|} - \frac{\|x\|^2}{\|x\|^3}$$

$$= \frac{n}{\|x\|} - \frac{1}{\|x\|} = \underline{\underline{\frac{n-1}{\|x\|}}} .$$

Def 4.12 $C^m(G,W)$

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, W norm. Raum, $(\mathbb{K}\text{-VR})$

$C^m(G,W)$ sei der Raum der m-mal stetig partiell diff'baren Fktnen $f: G \to W$.

D.h.
- f ist st.
- f ist partiell diff'bar
- Jedes $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ ist st. und partiell diff'bar
- Jedes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_{j_1} \partial x_{j_2}}$ ist st. und p. di'bar

$\vdots$

- $\frac{\partial^{m-1} f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_{m-1}}}$ ist st. und p.d.bar,
- $\frac{\partial^m f}{\partial x_{j_1} \cdots \partial x_{j_m}}$ ist st.

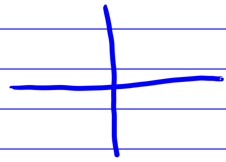
$$C^0(G,W) := \{ f: G \to W \mid f \text{ st.} \}$$

$$C^m(G) := C^m(G,\mathbb{K}).$$

Bem 4.5 partiell diffbar $\not\Rightarrow$ st.

Bsp $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x=0 \\ 0 & y=0 \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$



ist in $(0,0)$ partiell diffbar
aber nicht stetig.