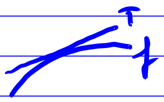
Tangentialebene

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, Tangentialebene an den Graphen von f in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ist Graph von $T = T_{(x_0,y_0)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ affin-linear.

Def: Seien V, W $\mathbb{R}$-VR. $T : V \to W$ heißt affin-linear, wenn $\exists\, w \in W$ $\exists$ lineare $A : V \to W$ $\forall v \in V$: $T(v) = w + Av$.

$$T(x,y) = \alpha + \beta x + \gamma y$$

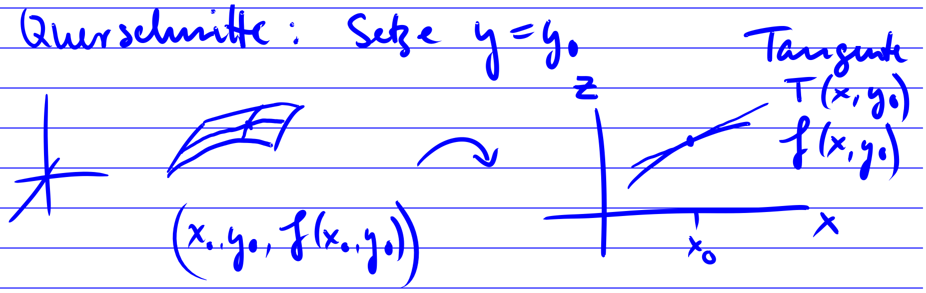
und $f(x,y) \approx T(x,y)$ für (x,y) nahe bei (x_0, y_0).



Sicherlich $f(x_0,y_0) = T(x_0,y_0) = \alpha + \beta x_0 + \gamma y_0$

also $T(x,y) = f(x_0,y_0) + \alpha'(x - x_0) + \beta'(y - y_0)$.

Querschnitte: Setze $y = y_0$



$$f(x,y_0) \approx T(x,y_0) = f(x_0,y_0) + \alpha'(x - x_0)$$

Also $\alpha' = \dfrac{d}{dx} f(x,y_0) \Big|_{x=x_0} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$

Ebenso $\beta' = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$

Also
$$T(x,y) = f(x_0,y_0) + \partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0) + \partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0).$$

$\left[P := (x_0,y_0)\right]$
$$= f(P) + \left\langle \nabla f(P), \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - P \right\rangle$$

T = "affin-lineare Approx. an f" in P

Konseq. für Richtungsableitungen:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) \overset{\text{Def}}{=} \frac{d}{dt} f(P + vt)\Big|_{t=0}$$
$$\underset{\text{sollte}}{\overset{\text{oben}}{=}} \frac{d}{dt} T(P+vt)\Big|_{t=0}$$
$$= \frac{d}{dt} f(P) + \langle \nabla f(P), vt \rangle \Big|_{t=0}$$

$$= \langle \nabla f(P), v \rangle$$

$$= v_x \, \partial_x f(P) + v_y \, \partial_y f(P).$$

(vgl. ÜA 14)

<u>Bem</u> Nicht jede Fkt besitzt überall eine Tangentialebene

Bsp: $f(x) = \|x\|$ bei $P = 0$.

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$