Totale Ableitung

Def 4.23 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to W$ (norm. R.)

Die $\mathbb{R}$-affin-lineare Abb $T: \mathbb{R}^n \to W$ heißt affin-lineare Approximation an f in $x_0 \in G$, wenn

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - T(x)}{\|x - x_0\|} = 0$$

(hier ist $\|\cdot\|$ bel. Norm auf $\mathbb{R}^n$.)

Wenn $\exists T$ und $f(x_0) = T(x_0)$, so heißt f total differenzierbar in x_0, und die $\mathbb{R}$-lineare Abb $A: \mathbb{R}^n \to W$,

$$A(h) = T(x_0 + h) - T(x_0)$$

heißt das Differenzial oder die (totale) Ableitung von f in x_0,

$$A = Df\big|_{x_0}$$

f heißt total differ. $\Leftrightarrow \forall x_0 \in G$: tot. differ. in x_0

Ihre (totale) Ableitung ist Df:

$$G \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, W) = \{\text{lin. Abb} : \mathbb{R}^n \to W\}.$$

Bsp $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = (\mathbb{R}^n)^*$

Dualraum

$\mathrm{Hom}(V, \mathbb{R}) = V^*$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad (A_1, \dots, A_n) \in (\mathbb{R}^n)^*$

$Av = \langle \nabla f(P), v \rangle \Rightarrow$

$A = (A_1 \dots A_n) = (\partial_1 f(P), \dots, \partial_n f)$

Bem T ist eind.

Bew (1) (4.29) Jede lin. Abb

$A : \mathbb{R}^n \to W$ ist stetig weil Lipschitz

mit $L = \sum_{j=1}^{n} \|Ae_j\|_W$.

denn:

Zeige: $\|Ax\|_W \leq L\|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\|Ax\|_W = \left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \, A \, e_j \right\|_W$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|x_j|}_{\leq \|x\|} \|Ae_j\|_W$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \|x\| \, \|Ae_j\|_W$$

$$= \|x\| \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \|Ae_j\|_W}_{L}$$

② T eind

a) Zeige: $T_1(x_0) = T_2(x_0)$

Wenn T_1, T_2 ~~a~~ aff-lin. Appr. an f in x_0

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_1(x)}{\|x-x_0\|} = 0 \text{ und } \lim \frac{f(x)-T_2(x)}{\|x-x_0\|} = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{x\to x_0} \underbrace{\frac{f(x)-T_1(x)}{\|x-x_0\|} - \frac{f(x)-T_2(x)}{\|x-x_0\|}}_{\frac{T_2(x)-T_1(x)}{\|x-x_0\|}}$$

also $$\frac{\|T_2(x_0) + A_2(x-x_0) - T_1(x_0) - A_1(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}$$

$$\geq \frac{\|T_2(x_0) - T_1(x_0)\|}{\|x-x_0\|} - \underbrace{\frac{\|(A_2-A_1)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|}}_{\leq L_{A_2-A_1}}$$

$\xrightarrow{x\to x_0} \infty$

wäre $T_2(x_0) \neq T_1(x_0)$ ↯

b) Zeige: $A_1 = A_2$

$$\frac{\|(A_2-A_1)(x-x_0)\|}{\|x-x_0\|} \xrightarrow{x\to x_0} 0$$

insbes. für $x = x_0 + \epsilon e_j$, $\epsilon > 0$,

$$\|(A_2-A_1)e_j\| = \frac{\|(A_2-A_1)\varepsilon e_j\|}{\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0$$

$$\Rightarrow \|(A_2-A_1)e_j\| = 0 \quad \forall j \quad \Rightarrow A_2-A_1=0.$$

$\square$

Bem 4.25 $f: \mathbb{R}^n \supset G \longrightarrow W$

f tot. diffb. in x_0 $\Leftrightarrow$

$$\exists \text{ lin. } A:\mathbb{R}^n \to W: \; f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + \underbrace{o\left(\|x-x_0\|\right)}_{g(x) \text{ mit } \frac{g(x)}{\|x-x_0\|} \xrightarrow{x\to x_0} 0.}$$

Bem f tot. diffb. in x_0 $\Longrightarrow$ f st. in x_0.

Bew A Lipschitz $\Rightarrow$ $A(x-x_0) \xrightarrow{x\to x_0} 0$

$$o\left(\|x-x_0\|\right) \xrightarrow{x\to x_0} 0 \quad \square$$

Bem f tot. differbar in x_0 $\Rightarrow$

$$\exists \frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = Av.$$

Bew $$f(x_0+vt) = f(x_0) + Avt + \underbrace{o\left(\|v\|\,|t|\right)}_{\overset{v \text{ fest}}{=} o(|t|)}$$

$$\frac{d}{dt} f(x_0+vt)\Big|_{t=0} = \cancel{A_{x_0}\ldots}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+vt)-f(x_0)}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0}\left(Av + \underbrace{\frac{o(|t|)}{t}}_{\longrightarrow 0}\right) = Av \qquad \square$$

<u>Bsp</u> $f(X) = X^2; \quad f: M(n,\mathbb{R}) \to M(n,\mathbb{R})$

ist total differbar:

$$f(X_0+\delta X) = \underbrace{X_0^2}_{f(X_0)} + \underbrace{X_0\,\delta X + (\delta X)X_0}_{A_{X_0}\delta X} + \underbrace{(\delta X)^2}_{o(\|\delta X\|)}$$

$\|\cdot\|$ = "Operator-Norm"

= kleinste Lipschitz-Konstante

$$\Leftarrow \quad \frac{\|(\delta X)^2\|}{\|\delta X\|} \to 0 \quad \Leftarrow \|(\delta X)^2\|$$

$$\leq \|\delta X\|\,\|\delta X\|$$

$$= \|\delta X\|^2 \qquad \square$$