Kettenregel

1. Fassung: Sei $x:(a,b)\to\mathbb{R}^n$ in $t_0\in(a,b)$ diffbar, $G\subset\mathbb{R}^n$ offen, $x((a,b))\subset G$, $f:G\to\mathbb{R}$ (tot.) diffbar in $x(t_0)$.
Dann $t\mapsto f(x(t))$ diffbar in t_0 und

$$\frac{d}{dt}f(x(t))\Big|_{t_0} = \left\langle \nabla f(x(t_0)), \frac{dx}{dt}(t_0)\right\rangle$$

$$= \nabla f\cdot\frac{dx}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\frac{dx_i}{dt}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial \frac{dx}{dt}(t_0)}(x(t_0)) \quad \text{Ri-Abl.}$$

2. Fassung Sei $x:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ in $s_0\in\mathbb{R}^m$ diffbar, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ in $x(s_0)$ diffbar.
Dann ist $f\circ x$ in s_0 diffbar und

$$\frac{\partial}{\partial s_k}f(x(s))\Big|_{s_0} = \sum_{j=1}^{\overset{n}{\cancel{m}}}\frac{\partial f}{\partial x_j}(x(s_0))\,\frac{\partial x_j}{\partial s_k}(s_0)$$

3. Fassung $\underset{\substack{\cap \\ U}}{\overset{\text{offen}}{G}} \xrightarrow{g} \underset{\substack{\cap \\ V}}{\overset{\text{offen}}{H}} \xrightarrow{f} W$ (norm. Raum)

$\mathbb{R}$-VRe, $\dim U < \infty$

$\dim V < \infty$

Sei g in $x \in G$ diffb.

und f in $g(x) \in H$ diffb. Dann ist

$f \circ g : G \to W$ in x diffbar und

$$\underbrace{D(f \circ g)|_x}_{W \leftarrow U} = \underbrace{Df|_{g(x)}}_{W \leftarrow V} \circ \underbrace{Dg|_x}_{V \leftarrow U}.$$

Bew Sei $A := Dg|_x$, $B := Df|_{g(x)}$,

Zeige: $D(f \circ g)|_x = BA$

$$g(x+h) = g(x) + Ah + \varphi(h), \quad \varphi(h) = o(\|h\|)$$
$$f(g(x)+\eta) = f(g(x)) + B\eta + \psi(\eta), \quad \psi(\eta) = o(\|\eta\|)$$

$$\Rightarrow (f \circ g)(x+h) = f(g(x) + \underbrace{Ah + \varphi(h)}_{\eta})$$

$$= f(g(x)) + BAh + \underbrace{B\varphi(h) + \psi(Ah + \varphi(h))}_{=: \chi(h)}$$

Zu zeigen: $\chi(h) = o(\|h\|)$.

Also: 1) B Lipschitz $\Rightarrow B\varphi(h) = o(\|h\|)$

$$\frac{\|B\varphi(h)\|}{\|h\|} \leq L \frac{\|\varphi(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \to 0} 0.$$

Also $B\varphi(h) = o(\|h\|)$.

2) $\psi_1(\eta) = \dfrac{\psi(\eta)}{\|\eta\|} \xrightarrow{\eta \to 0} 0$

A Lipschitz $\Rightarrow \|Ah\| \le L_A \|h\|$

$\varphi(h) = o(\|h\|) \Rightarrow \|\varphi(h)\| \le \|h\|$ für h klein genug.

Daher $\quad \dfrac{\|\psi(\overbrace{Ah + \varphi(h)}^{\eta})\|}{\|h\|} = \dfrac{\|Ah+\varphi(h)\|\,\|\psi_1(Ah+\varphi(h))\|}{\|h\|}$

$$\le \frac{(L_A + 1)\cancel{\|h\|}\,\|\psi_1(Ah+\varphi(h))\|}{\cancel{\|h\|}} \to 0$$

für $h \to 0$ $\square$

Bsp $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differbar

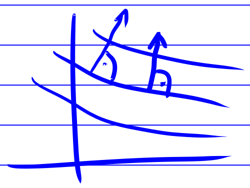
$x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ differbar

verlaufe auf einer Niveaufläche von f,

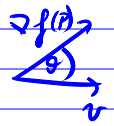
d.h. $\quad f(x(t)) = \text{const}$.

$\Rightarrow 0 = \dfrac{d}{dt} f(x(t)) = \nabla f(x(t)) \cdot \dfrac{dx}{dt}$

$\Rightarrow \dfrac{dx}{dt} \perp \nabla f \qquad$ Der Gradient steht $\perp$ auf der Niveaufl.



$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \langle \nabla f(P), v \rangle$$



$$= \|\nabla f(P)\| \; \|v\| \; \cos\theta$$

Wähle $\|v\| = 1$, variiere ϑ

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}$ ist max. bei $\theta = 0$

min bei $\theta = \pi$

0 bei $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$

Der Gradient zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs, und sein Betrag ist die Abl. in diese Richtung.

Voraussetzung: f diffb. in P