Produktregel

1. Fassung Wenn $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diffb. in $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch $(fg)(x) := f(x)\, g(x)$ diffbar in x und

$$\nabla(fg) = (\nabla f)\, g + f\, (\nabla g).$$

Variante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\underline{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, diffb.

dann
$$\frac{d}{dt}(f\underline{g}) = \frac{df}{dt}\,\underline{g} + f\,\frac{d\underline{g}}{dt}.$$

Variante Sk.prod: $\underline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\underline{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $[u \cdot v = \langle u, v \rangle]$, dann

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{f}(t) \cdot \underline{g}(t)\right) = \frac{d\underline{f}}{dt}(t) \cdot \underline{g}(t) + \underline{f}(t) \cdot \frac{d\underline{g}}{dt}(t),$$

und für $n = 3$

$$\frac{d}{dt}\left(\underline{f}(t) \times \underline{g}(t)\right) = \frac{d\underline{f}}{dt} \times \underline{g}(t) + \underline{f}(t) \times \frac{d\underline{g}}{dt}(t).$$

<u>Variante:</u> Matrixmult. $\quad$ $n \times n$ Matrizen

$$A, B : \mathbb{R} \longrightarrow M(n, \mathbb{R})$$

$$\frac{d}{dt}\Big(A(t)\,B(t)\Big) = \frac{dA}{dt} B + A \frac{dB}{dt}.$$

<u>Variante:</u> $A, B : \underset{\ni x}{\mathbb{R}^m} \longrightarrow M(n, \mathbb{R})$

$$\nabla \Big(A(x)\,B(x)\Big) = \Big(\nabla A(x)\Big) B(x) + A(x)\,\nabla B(x)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x)\; b_{jk}(x) = \Big(A(x)B(x)\Big)_{ik}$$

$i, j, k \in \{1 \dots n\}$

$x = (x_1 \dots x_m)$, x_a, $a \in \{1 \dots m\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_a}\Big(A(x) B(x)\Big) = \frac{\partial A}{\partial x_a} B + A \frac{\partial B}{\partial x_a}.$$

<u>allg. Fassung</u> 4.39

Sei B (das "Produkt") eine bilineare

Abb $\quad V_1 \times V_2 \longrightarrow W$

V_1, V_2: endl.-dim VRe $\qquad$ W: norm. R.

$$f_j : G \longrightarrow V_j \qquad j = 1, 2$$

$G \subset U$ offen, U endl-dim VR

Wenn f_j diffbar $\forall j$, dann ist

$$u \mapsto \underbrace{B(f_1(u), f_2(u))}_{=:F(u)}, \quad \underset{\underset{\mathcal{U}}{\cap}}{G} \to W$$

diffbar und

$$DF|_u v = B(Df_1|_u v, f_2(u))$$
$$v \in \mathcal{U} \qquad + B(f_1(u), Df_2|_u v).$$

Ebenso für multilineare $B: V_1 \times \dots \times V_r \to W$ endl-dim

diffb. $f_j : G \to V_j$

$F(u) = B(f_1(u), \dots f_r(u))$, dann

$$DF|_u v = \sum_{j=1}^{r} B(f_1(u), \dots, Df_j|_u v, \dots f_r(u)).$$

<u>Bew</u> Schritt 1) B ist "doppelt Lipschitz",

$$\|B(x,y)\|_W \leq L_B \|x\|_{V_1} \|y\|_{V_2} \quad \text{mit}$$

$$L_B = \sum_{i,j} \|B(e_i, e_j)\|_W$$

denn $\|B(x,y)\| = \left\| B\left(\sum_i x_i e_i, \sum_j y_j e_j\right) \right\|$

$$= \left\| \sum_{ij} x_i y_j B(e_i, e_j) \right\|$$

$$\le \sum_{i,j} \underbrace{|x_i|}_{\le \|x\|} \underbrace{|y_j|}_{\le \|y\|} \; \|B(e_i, e_j)\|$$

$$\le L_B \; \|x\| \; \|y\| .$$

Schritt 2)

$$F(u+v) = B\big(f_1(u+v), f_2(u+v)\big)$$

$$= B\Big(f_1(u) + Df_1|_u v + o(\|v\|),\; f_2(u) + Df_2|_u v + o(\|v\|)\Big)$$

$$= \overbrace{B\big(f_1(u), f_2(u)\big)}^{F(u)}$$

$$\underbrace{+ B\big(Df_1|_u v, f_2(u)\big) + B\big(f_1(u), Df_2|_u v\big)}_{DF|_u v}$$

$$o(\|v\|)\left\{\begin{array}{l} + \underbrace{B\big(Df_1|_u v, Df_2|_u v\big)} + B\big(o(\|v\|), f_2(u) + Df_2|_u v\big) \\ \frac{\|\cdot\|}{\|v\|} \le \frac{L_B \|Df_1|_u v\| \, \|Df_2|_u v\|}{\|v\|} \le L_B L_{Df_1|_u} \|v\| \, L_{Df_2|_u} \|v\| \\ + \underbrace{B\big(f_1(u) + Df_1|_u v, o(\|v\|)\big)}_{o(\|v\|)} + \underbrace{B\big(o(\|v\|), o(\|v\|)\big)}_{o(\|v\|)} \end{array}\right.$$

$$\|\cdot\| \le L_B \; o(\|v\|) \Big(\|f_2(u)\| + L_{Df_2|_u} \|v\|\Big)$$

$$= \text{const.} \; o(\|v\|) + L_B L_{Df_2|_u} \underbrace{o(\|v\|^2)}_{o(\|v\|)}$$

$$= o(\|v\|)$$

multilinear analog $\square$

Bsp 4.40 c) $\det : \mathbb{R}^m \times \ldots \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ multilinear

Seien $f_1 \dots f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ differ,

dann

$$D \det\left(f_1(\cdot), \dots, f_m(\cdot)\right)\Big|_x v$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \det\left(f_1(x), \dots, Df_j\big|_x v, \dots f_m(x)\right).$$