Vektorwertige Integrale einer Variablen

Satz und Def Sei V VR, $\dim V = n < \infty$, $\underline{x} : [a,b] \to V$ st., $\mathcal{B} = (\underline{b}_1, \dots, \underline{b}_n)$ Basis von V, $\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} x_i(t)\, \underline{b}_i$.

Dann ist

$$x_i : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ st., und}$$

$$\int_a^b \underline{x}(t)\, dt := \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b x_i(t)\, dt \right) \underline{b}_i \in V$$

ist unabh. von der Wahl von $\mathcal{B}$.

Bew x_i st. $\Leftarrow$ $\begin{array}{l} V \to \mathbb{R} \\ \underline{v} \mapsto v_i \end{array}$ ist lin und Lipschitz (weil $\dim V < \infty$).

Sei $\tilde{\mathcal{B}} = (\tilde{\underline{b}}_1, \dots, \tilde{\underline{b}}_n)$ auch Basis von V.

$$\underline{x}(t) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x}_j(t)\, \tilde{\underline{b}}_j, \quad \tilde{\underline{b}}_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \underline{b}_i$$

$$\Rightarrow \underline{x}(t) = \sum_{ij} \tilde{x}_j(t)\, a_{ij}\, \underline{b}_i$$

$$\Rightarrow x_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, \tilde{x}_j(t).$$

Also $$\sum_{j=1}^{n}\left(\int_a^b \tilde{x}_j(t)\,dt\right)\tilde{\underline{b}}_j = \sum_{ij}\left(\int_a^b \tilde{x}_j(t)\,dt\right)a_{ij}\,\underline{b}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_j a_{ij}\int_a^b \tilde{x}_j(t)\,dt\right)\underline{b}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\int_a^b \overbrace{\sum_j a_{ij}\tilde{x}_j(t)}^{x_i(t)}\,dt\right)\underline{b}_i\,. \qquad \square$$