Wegintegral

Def Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\underline{f} : G \to \mathbb{R}^n$ st. VF, $\underline{\gamma} : [a,b] \to G$ ein st. differer Weg.

Dann heißt

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{f}(\underline{x}) \cdot d\underline{x} := \int_a^b \underline{f}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \frac{d\underline{\gamma}}{dt}\, dt$$

das Kurvenintegral oder Wegintegral von f über γ.

Bsp $\underline{f}$ = Kraftfeld, $\int_{\underline{\gamma}} \underline{f} \cdot d\underline{x}$ = verrichtete Arbeit

Satz 4.42 (Hauptsatz für Wegintegrale)
Wenn $\underline{f} = \operatorname{grad} F$, $F \in C^1(G, \mathbb{R})$, dann

$$\int_{\underline{\gamma}} \underline{f} \cdot d\underline{x} = F(\underline{\gamma}(b)) - F(\underline{\gamma}(a)).$$

Bew $F \circ \gamma$ ist st. differ,

$$\frac{d}{dt} F(\underline{\gamma}(t)) \overset{KR}{=} \nabla F(\underline{\gamma}(t)) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(t)$$

$$\Rightarrow \int_{\underline{\gamma}} \underline{f} \cdot d\underline{x} = \int_a^b \underline{f}(\underline{\gamma}(t)) \cdot \dot{\underline{\gamma}}(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} F(\underline{\gamma}(t)) \right) dt$$

$$\overset{HS}{=} F(\underline{\gamma}(b)) - F(\underline{\gamma}(a)). \qquad \square$$

Korollar 4.43a (Mittelwertsatz)

Für $\underline{\gamma}(t) = \underline{x} + t\underline{h}$, $t \in [0,1]$:

Wenn die Strecke von $\underline{x}$ nach $\underline{x}+\underline{h}$ in G liegt, dann

$$F(\underline{x}+\underline{h}) - F(\underline{x}) = \left(\int_0^1 \nabla F(\underline{x}+t\underline{h})\, dt \right) \cdot \underline{h}$$

Korollar 4.43b

Stimmt immer noch, wenn F $\mathbb{R}^m$-wertig ist. Allerdings kann man für $m \geq 2$ das Integral nicht durch einen Zwischenwert $\nabla F(\underline{x} + \theta \underline{h})$ ersetzen.

D.h.: $\underline{m=1}$: $F(\underline{x}+\underline{h}) - F(\underline{x})$

$$= \underline{h} \cdot \nabla F(\underline{x} + \theta \underline{h})$$

für ein $\theta \in [0,1]$

($\Leftarrow$ MWS von Ana 1 für $g(t) := F(\underline{x}+t\underline{h})$)

$\underline{m=2}$: nicht mehr (i.A.)