Anwendungen Wegintegrale

Korollar 4.46 (Schrankensatz)

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $F \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$

$\underline{x}, \underline{y} \in G$, $\underline{\gamma} : [0,1] \to G$ st. diffbar

mit $\underline{\gamma}(0) = \underline{x}$, $\underline{\gamma}(1) = \underline{y}$.

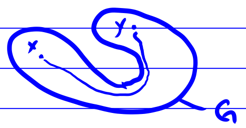
$$M := \sup \left\{ \left\| DF|_{\underline{\gamma}(t)} \right\| : t \in [0,1] \right\} < \infty$$

$$\|A\| = \sup_{v \neq 0} \frac{\|Av\|}{\|v\|} \quad \text{Operatornorm}$$

$= $ kleinste Lipschitz-Konst.

Dann

$$\|F(y) - F(x)\| \leq M \; L(\gamma)$$



$$= M \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

* Für Bew zuerst:

Lemma 4.47 (Δ-Ungl. für Integrale)

Sei $\beta : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ st. Dann

$$\left\| \int_0^1 \beta(t) \, dt \right\| \leq \int_0^1 \|\beta(t)\| \, dt.$$

<u>Bew</u> $I := \int_0^1 \beta(t)\, dt \in \mathbb{R}^n$

$$\|I\|^2 = \sum_{j=1}^n I_j^2 = \sum_{j=1}^n \left(\int_0^1 \beta_j(t)\, dt \right) I_j$$

$$= \int_0^1 \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^n I_j \beta_j(t)}_{\langle I, \beta(t) \rangle} \Big)\, dt$$

$$\overset{CS}{\leq} \int_0^1 \|I\| \, \|\beta(t)\| \, dt$$

$$\leq \|I\| \int_0^1 \|\beta(t)\|\, dt \Rightarrow \text{Beh} \quad \square$$

<u>Bew</u> des Schrankensatzes:

$$\|F(y) - F(x)\| \overset{4.42}{=} \Big\| \int_\gamma DF(\underline{x}) \cdot d\underline{x} \Big\|$$

$$= \Big\| \int_0^1 DF|_{\gamma(t)} \times \dot{\gamma}(t)\, dt \Big\|$$

$$\overset{4.47}{\leq} \int_0^1 \Big\| DF|_{\gamma(t)} \dot{\gamma}(t) \Big\| \, dt$$

$$\leq \int_0^1 \underbrace{\|DF|_{\gamma(t)}\|}_{\text{Op. norm}} \, \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt$$

$$\leq \int_0^1 M \, \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt$$

$$= M \int_0^1 \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt = M\, L(\gamma).$$

$\square$

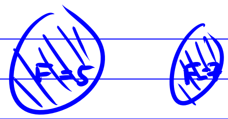
Korollar 4.48 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet (d.h. offen und (weg)-zusammenhgd.)

$F \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$.

Wenn $DF = 0$ auf G, dann ist $F = \text{const}$.

Variante: $G \subset \mathbb{R}^n$ offen,

$F \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$, $DF = 0$ auf G,



dann ist F auf jeder Zusammenhangskomp. von G konstant ("lokal konst.")

Bew Seien $x, y \in G$ bel.; G wegzus.

$\Rightarrow \exists \gamma : [0,1] \to G$ st. mit $\gamma(0) = x$
$\gamma(1) = y$.

1) Falls γ st. diffbar

Schrankensatz $\Rightarrow \|F(y) - F(x)\|$

$$\leq \underbrace{M}_{0} L(\gamma)$$

also $F(y) = F(x)$.

2) Aber haben nur γ st.!

Wir zeigen: $\exists\, x = x_0, x_1, x_2 \ldots x_k = y$,
alle $x_j \in G$

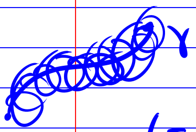
und $\forall j \; \exists \gamma_j$ st. diffb. Kurve von x_{j-1} nach x_j in G

$\overset{1)}{\Rightarrow} F(x_{j-1}) = F(x_j) \;\forall j \Rightarrow F(x) = F(y)$.

<u>Konstruktion:</u> G offen $\Rightarrow$

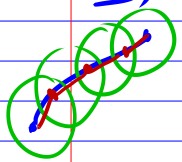
$$\forall z \in G\ \exists\, \varepsilon(z) > 0 : B_{\varepsilon(z)}(z) \subset G$$

$\Rightarrow$ offene Üb. $\gamma([0,1]) \subset \bigcup_{t\in[0,1]} B_{\varepsilon(\gamma(t))}(\gamma(t))$



$\gamma([0,1]) \subset G$ ist kompakt weil $[0,1]$ komp.

$\Rightarrow$ $\exists$ endl. Teilüb. $\gamma([0,1]) \subset \bigcup_{i=1}^{k} B_{\varepsilon(\gamma(t_i))}(\gamma(t_i))$



Wähle x_j im Überlapp

$\gamma_j :=$ Strecke $\subset B_{\varepsilon(\gamma(t_i))}(\gamma(t_i))$ weil konvex.

$\square$