Lokale Extrema

Def. 5.8 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$, $\underline{x} \in M$, $f: M \to \mathbb{R}$

f hat in $\underline{x}$ ein <u>lokales Maximum</u> $:\Leftrightarrow$

$\exists \delta > 0 \ \forall \underline{y} \in B_\delta(\underline{x}) \cap M: \ f(\underline{y}) \leq f(\underline{x})$

<u>striktes lok. Max.</u> $:\Leftrightarrow$

$\exists \delta > 0 \ \forall \underline{y} \in B_\delta(\underline{x}) \cap M \setminus \{\underline{x}\}: \ f(\underline{y}) < f(\underline{x})$

Entspr. lok. Min., Extremum = Max. oder Min.

Prop. 5.9 (Kap. 0 and) Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\underline{x} \in G$, $f: G \to \mathbb{R}$ habe ein lok. Extremum in $\underline{x}$, f sei partiell differbar in $\underline{x}$, dann

$$\partial_i f(\underline{x}) = 0 \quad \forall i \in \{1 \dots n\}.$$

Bem lok. Extrema können liegen,

- wo $\partial_i f = 0 \ \forall i$ $\quad\Big\}$ "$\underline{x}$ ist kritischer Punkt von f"
- wo f nicht partiell differbar
- auf dem Rand.

Satz 5.12 ("2te Abl. – Kriterium", "2nd derivative test")

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^2(G, \mathbb{R})$, $\underline{x} \in G$, $\nabla f(\underline{x}) = 0$.

a) Ist $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ positiv definit, dann hat f in $\underline{x}$ striktes lok. Min.

b) Ist $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ negativ definit, dann hat f in $\underline{x}$ striktes lok. Max.

c) Ist $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ indefinit, dann hat f in $\underline{x}$ kein lok. Extremum.

Def $A \in M(n, \mathbb{R})$ mit $A = A^T$ heißt

<u>pos. def.</u> $\iff \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} : \langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle > 0$

<u>neg. def.</u> $\iff \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\} : \langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle < 0$

<u>pos. semidef.</u> $\iff \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle \geq 0$

<u>neg. semidef.</u> $\iff \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle \leq 0$

<u>indef.</u> $\iff \exists \underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n : \langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle > 0$, $\langle \underline{y}, A\underline{y} \rangle < 0$.

Bem Jedes $A = A^T$ ist diagbar durch ONB,
(Spektralsatz)

$$\langle \underline{x}, \operatorname{diag}(\alpha_1 \dots \alpha_n)\, \underline{x} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i^2$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

daher

A pos. def. $\Leftrightarrow$ alle EWe > 0

A neg. def. $\Leftrightarrow$ alle EWe < 0

A pos. semidef $\Leftrightarrow$ alle EWe ≥ 0

A neg. semidef $\Leftrightarrow$ alle EWe ≤ 0

A indef. $\Leftrightarrow$ $\exists$ pos. EW und $\exists$ neg. EW.

Wenn A pos. def., λ_0 der kleinste EW $\Rightarrow$

$$\langle \underline{x}, A\underline{x} \rangle \geq \lambda_0 \|\underline{x}\|^2$$

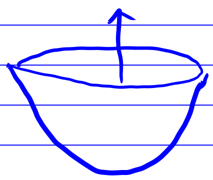
Bsp 5.14 a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\nabla f = (2x, 2y)$

$\nabla f = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (0,0)$

$\operatorname{Hess} f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ pos. def. $\forall \underline{x}$

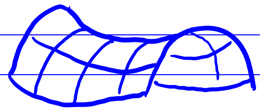
Satz 5.12: striktes lok. Min. bei $(0,0)$



Rotations-Paraboloid

b) $f(x,y) = x^2 - y^2$, $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

"Sattelfläche"



$\nabla f = (2x, -2y)$, $\nabla f = 0 \iff (x,y) = (0,0)$

$\text{Hess} f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ indef.

Satz 5.12: f hat kein lok. Extr.

"Sattelpunkt" in $(0,0)$

Bew von Satz 5.12

a) $\exists B_\delta(\underline{x}) \subset G$. Kor. 5.6 $\Longrightarrow$

$$\forall \underline{h} \in B_\delta(\underline{0}): \ f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + \frac{1}{2}\langle \underline{h}, \text{Hess} f(\underline{x})\, \underline{h}\rangle + \varphi(\underline{h}),$$

$\varphi = o(\|\underline{h}\|^2)$. Wähle $0 < \delta' < \delta$ so, dass

$$\forall \underline{h} \in B_{\delta'}(\underline{0}): \ |\varphi(\underline{h})| \le \frac{\lambda_0}{4}\|\underline{h}\|^2$$

λ_0 = kleinster EW von $\text{Hess} f(\underline{x})$.

$$\Longrightarrow \forall \underline{h} \in B_{\delta'}(\underline{0}) \setminus \{\underline{0}\}: \ f(\underline{x}+\underline{h}) = f(\underline{x}) + \frac{1}{2}\langle \underline{h}, \text{Hess} f(\underline{x})\, \underline{h}\rangle + \varphi(\underline{h})$$

$$\ge f(\underline{x}) + \frac{1}{2}\lambda_0 \|\underline{h}\|^2 - \frac{\lambda_0}{4}\|\underline{h}\|^2 > f(\underline{x})$$

$$= f(\underline{x}) + \underbrace{\frac{\lambda_0}{4}\|\underline{h}\|^2}_{>0}$$

b) analog.

c) $\operatorname{Hess} f(\underline{x})$ indef.

Wähle $\underline{h} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}$ so, dass

$$\alpha := \langle \underline{h}, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\, \underline{h} \rangle > 0$$

$t > 0$, klein genug

$$\Rightarrow f(\underline{x} + t\underline{h}) = f(\underline{x}) + \tfrac{1}{2} \langle t\underline{h}, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\, t\underline{h} \rangle + \varphi(t\underline{h})$$

$$= f(\underline{x}) + \tfrac{1}{2} \underbrace{\langle \underline{h}, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\, \underline{h} \rangle}_{\alpha} t^2 + \varphi(t\underline{h})$$

$$|\varphi(t\underline{h})| \leq \frac{\alpha}{4 \|\underline{h}\|^2} t^2 \|\underline{h}\|^2 \quad \text{für } t \text{ klein genug}$$

$$\Rightarrow f(\underline{x} + t\underline{h}) \geq f(\underline{x}) + \frac{\alpha}{2} t^2 - \frac{\alpha}{4} t^2 = f(\underline{x}) + \frac{\alpha}{4} t^2 > f(\underline{x}) \quad \forall\, 0 < t < \delta$$

also $\forall$ Umg U von $\underline{x}$ $\exists\, \underline{y} = \underline{x} + t\underline{h} \in U$: $f(\underline{y}) > f(\underline{x})$.

Ebenso für $\tilde{\underline{h}}$ mit $\langle \tilde{\underline{h}}, \operatorname{Hess} f(\underline{x})\, \tilde{\underline{h}} \rangle < 0$.

Also hat f in $\underline{x}$ kein lok. Extr. $\square$