Bem 5.15 Wenn Hess $f(\underline{x})$ pos. semidef. aber nicht pos. def., bei $\underline{x}$ mit $\nabla f(\underline{x}) = 0$, dann kann der 2.-Abl.-Test nicht entscheiden, ob $\exists$ Min.

Bsp i) $f(x,y) = x^2 + y^4$

hat $\nabla f(0,0) = (0,0)$

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

und striktes lok. Min bei $(0,0)$.

ii) $f(x,y) = x^2 + y^3$

hat $\nabla f(0,0) = (0,0)$

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

aber kein lok. Extr. bei $(0,0)$.

iii) $f(x,y) = x^2$.

hat $\nabla f(0,0) = (0,0)$

$\text{Hess} f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

und entartetes (d. h. nicht striktes) lok. Min. bei $(0,0)$

Umkehrung: Wenn $f \in C^2(G,\mathbb{R})$ lok. Min bei $\underline{x}$ hat, dann $\nabla f(\underline{x}) = 0$, Hess $f(\underline{x})$ nicht indef.

nicht neg. def.

$\Rightarrow$ Hess $f(\underline{x})$ pos. semidef.

$$\left.\begin{array}{l} \nabla f(\underline{x}) = 0 \\ \text{Hess } f(\underline{x}) \text{ pos. semidef} \end{array}\right\} \begin{array}{c} \not\Longrightarrow \\ \Longleftarrow \end{array} \begin{array}{l} \text{lok. Min} \\ \text{bei } \underline{x} \end{array}$$