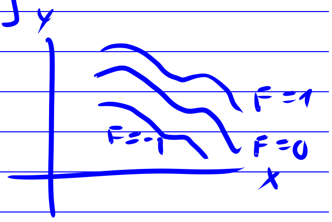
Kap. 6: Implizite Funktionen

[Cauchy 1821, Dini 1878]

$F(x,y) = 0$ Höhenlinie



F fkt., wollen $y = g(x)$

implizite Fkt

Bsp $e^{\sin(xy)} + x^2 + 2y + 1 = 0$

$\nexists$ Formel für g, aber $\exists g$

Bsp Spezialfall Umkehrfkt $F(x,y) = x - f(y)$

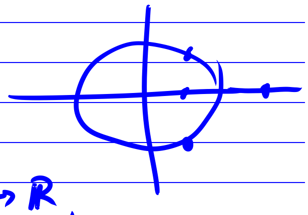
$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow y = g(x)$

Satz über impl. Fktnen macht (unter Ann. an F) 3 Aussagen über g:

1) Ex. und Eind. (lokal)
2) Regularität (g st. diffbar)
3) Berechnung von $g' = Dg$
   (nützl. selbst wenn g explizit)

Bsp 6.1 $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$

$C = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid F(x,y) = 0 \}$

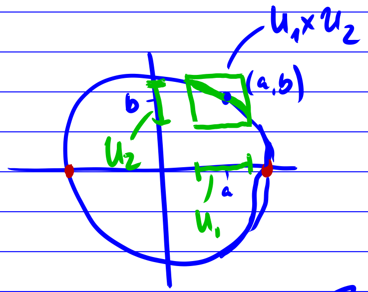


= Kreis

$\neq$ Graph einer Fkt $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

denn:

- $|x| > 1 \Rightarrow \nexists y : (x,y) \in C$
- $|x| < 1 \Rightarrow \exists_2 y : (x,y) \in C$, $y = \pm\sqrt{1-x^2}$.



Gib $(a,b) \in C$ vor, wählt "Zweig" aus:

$\exists$ Umg. U_1 von a $\exists$ Umg U_2 von b

$\exists g: U_1 \to U_2$ $\forall (x,y) \in U_1 \times U_2$

$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = g(x)$

Dabei ist $g(a) = b$

Außer: bei $(a,b) = (1,0)$ oder $(-1,0)$

(wo Tangente vertikal) $\nexists g$ auf Umg von a

Jetzt $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $F(x,y) \in \mathbb{R}^m$

(passende Anz. Gl.en)

Jacobi-Matrix

$$DF = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} & \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} & \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{array}\right) \overset{m}{=} \underbrace{\left[\begin{array}{c|c} X & Y \end{array}\right]}_{n \quad m}$$

$m \times (n+m)$

6.2 Satz über implizite Fktnen

Sei $G \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ offen, $F \in C^1(G, \mathbb{R}^m)$, $(a,b) \in G$, $F(a,b) = 0$ und

$Y(a,b) = D_y F(a,b)$ inv.bar.

Dann $\exists$ Umg. U_1 von a $\exists$ Umg. U_2 von b mit $U_1 \times U_2 \subset G$ so, dass

1) $\exists_1 g : U_1 \to U_2$ $\forall (x,y) \in U_1 \times U_2$:

$$F(x,y) = 0 \iff y = g(x).$$

2) $g \in C^1(U_1, \mathbb{R}^m)$

3) $Y(x,y)$ ist überall in $U_1 \times U_2$ inv.bar, und

$$\underset{x \in U_1}{Dg(x)} = -Y^{-1}(x, g(x)) \underbrace{\overset{X(x,g(x))}{D_x F(x, g(x))}}_{\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)_{ij} \; m \times n}$$

Bem 6.3 a) $Y(a,b)$ inv. bar $\Leftrightarrow$ $\det Y(a,b) \neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{Y(a,b)}_{\frac{\partial F}{\partial(0,v)}} v \neq 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$

Daher $F(a,y) = 0 \Leftrightarrow y = b$

$\forall y \in \mathcal{U}mg\,(b)$

c) $Dg(a) = -Y^{-1}(a,b)\, D_x F(a,b)$

lässt sich meist expl. berechnen ohne expl. g.

$F \in C^k \Rightarrow g \in C^k$, und das Taylor-Poly von g in a vom Grad k lässt sich expl. berechnen. (ÜA)