Beweis des Satzes über implizite Fktnen

1) Newton-Verfahren für jedes x

Def. $\Phi : G \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$$\Phi(x,y) = y - Y^{-1}(\underbrace{\cancel{x,y}}_{a,b})F(x,y)$$

Dann $F(x,y) = 0 \Longleftrightarrow Y^{-1}(a,b)\,F(x,y) = 0$

$$\Longleftrightarrow \Phi(x,y) = y$$

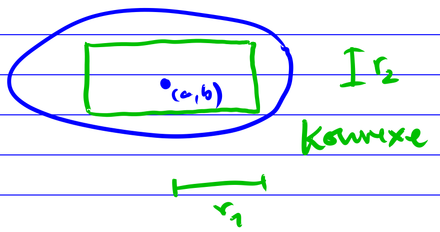
BFPS:

Ist $\Phi(x,\cdot)$ Kontraktion? $\quad Y_0 := Y(a,b)$

$$D_y\Phi\big|_{(a,b)} = \underset{m\times m}{E} - Y_0^{-1}Y_0 = 0$$

$F \in C^1$

$\Longrightarrow$ $\quad \left\| D_y\Phi\big|_{(x,y)} \right\| < \frac{1}{2}$ $\underbrace{\text{in einer Umg. von } (a,b)}$



$\supset \overline{B_{r_1}(a)} \times \overline{B_{r_2}(b)}$

Schrankensatz $\Longrightarrow$

$$\| \Phi(x,y) - \Phi(x,y') \| \leq \frac{1}{2} \| y - y' \| \quad (*)$$

$$\forall x \in \overline{B}_{r_1}(a) \ \forall y,y' \in \overline{B}_{r_2}(b)$$

Brauchen: $\Phi(x, \overline{B_{r_2}(b)}) \subset \overline{B_{r_2}(b)}$ Selbst-Abb.

$$\|\Phi(x,y) - b\| \le \underbrace{\|\Phi(x,y) - \Phi(x,b)\|}_{\overset{(*)}{\le} \frac{1}{2}\underbrace{\|y-b\|}_{\le r_2}} + \underbrace{\|\Phi(x,b) - b\|}_{\le \frac{1}{2} r_2 \text{ für } x \text{ nahe genug bei } a,}$$

$\forall y \in \overline{B_{r_2}(b)}$

weil $\Phi(a,b) = b$ und Φ st.

$\forall x \in \overline{B_{r_3}(a)}$ $(r_3 \le r_1)$

BFPS $\Rightarrow$ $\forall x \in \overline{B_{r_3}(a)}$ $\exists_1 y =: g(x)$:

$F(x,y) = 0$.

2) <u>g ist st.</u>

Dasselbe Φ für alle x zugleich

$\Psi(h)(x) = \Phi(x, h(x))$

$\Psi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$

$$\mathcal{A} := \left\{ h \in \underbrace{C(\overline{B_{r_3}(a)}, \mathbb{R}^m)}_{\substack{\text{Banachraum} \\ \text{mit } \|\cdot\|_\infty}} \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{Bild}(h) \subset \overline{B_{r_2}(b)} \\ h(a) = b \end{array} \right\}$$

$\mathcal{A}$ abg.

Ψ ist Kontraktion, weil

$$\|\Psi(h_1) - \Psi(h_2)\|_\infty$$

$$= \sup_{x \in \overline{B_{r_3}(a)}} \left\| \Phi(x, h_1(x)) - \Phi(x, h_2(x)) \right\|_{\mathbb{R}^m}$$

$$\overset{(*)}{\leq} \frac{1}{2} \sup_{x \in \overline{B_{r_3}(a)}} \| h_1(x) - h_2(x) \|_{\mathbb{R}^m}$$

$$= \frac{1}{2} \| h_1 - h_2 \|_\infty . \quad \left(\Psi \text{ ist Lipschitz mit Konst } = \tfrac{1}{2} \right)$$

mit Fixpunkt

$$\Psi(h) = h \iff \forall x \in \overline{B_{r_3}(a)} : \Phi(x, h(x)) = h(x)$$

$$F(x, h(x)) = 0$$

$$h(x) = g(x)$$

BFPS

$\Rightarrow$ $g \in \mathcal{A}$. $\Rightarrow$ g st.

$\underline{g \text{ ist } C^1}$ s. Skript.

3) $\underline{Dg}$: Kettenregel

$$0 = D_x \left[F(x, g(x)) \right]$$

$$= \underbrace{D_x F}_{X} \Big|_{(x, g(x))} + \underbrace{D_y F}_{Y} \Big|_{(x, g(x))} Dg\big|_x$$

$$Dg|_x = -Y^{-1}(x,g(x))\ X(x,g(x))$$

vorausgesetzt $\exists Y^{-1}(x,g(x))$ (oder $\overbrace{GL(n,\mathbb{R})}^{\{\text{inv. bar}\}}$ ist offen in $M(n,\mathbb{R})$)

Y st., $\det Y$ st. (x,y)

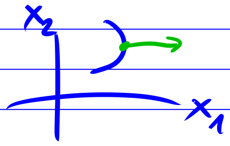
$\exists Y^{-1}(a,b) \Rightarrow \exists Y^{-1}(x,y)$ in Umg. von (a,b)

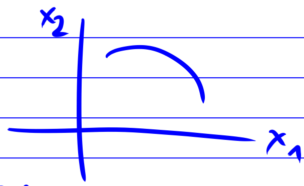
$\square$

Bsp 6.4 Niveaufläche $N_c = \{x \in G \mid f(x) = c\}$

$G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f : G \to \mathbb{R}$ C^1.

Wenn $\nabla f(a) \neq 0$ für $a \in N_c$, dann ist N_c in Umg von a der Graph einer C^1-Fkt von $n-1$ Variablen





Beweis O.B.d.A. $\frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$

$y := x_n$, $\bar{x} := (x_1 \dots x_{n-1})$

$$F(\bar{x},y) = f(\bar{x},y) - c, \quad \frac{\partial F}{\partial y}(\bar{a},a_n) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a) \neq 0$$

Y inv. bar $\overset{SIF}{\Rightarrow}$ Beh $\square$

Nicht wo $\nabla f = 0$:

a) bei $f(x,y) = x^2 + y^2$, ist $N_0 = \{\binom{0}{0}\}$

b) bei $f(x,y) = x^2 - y^2$ ist

$N_0 = \{|x| = |y|\}$