Lokale Umkehrbarkeit

$$x = f(y), \quad y = g(x)$$
$$F(x,y) = x - f(y)$$

Def 6.5 Seien $G, D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f: G \to D$ heißt Diffeomorphismus, wenn f bij., $f \in C^1(G, D)$ und $f^{-1} \in C^1(D, G)$.

(homeomorphism $\longrightarrow$ diffeomorphism)

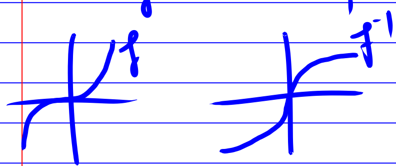
Bem 6.6 Dann ist $\forall x \in G$: $Df(x)$ ist inv.bar und $\left(Df(x)\right)^{-1} = D(f^{-1})(f(x))$.

Bew $f^{-1} \circ f = id \overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} E = D(f^{-1} \circ f)\big|_x$

$$= D(f^{-1})\big|_{f(x)} \, Df\big|_x \qquad \square$$

Bem 6.7 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ ist bij und C^1

aber $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $y \mapsto \begin{cases} \sqrt[3]{y} & \text{falls } y \geq 0 \\ -\sqrt[3]{-y} & \text{falls } y \leq 0 \end{cases}$



ist nicht diff.bar in 0

Beachte: $Df|_0$ ist nicht inv.bar.

Bsp "Diffeomorphismus": Thermodynamik

Die Menge M der thermischen Gleichgewichtszustände eines (ungemischten) Gases ist 3-dim und kann parametrisiert werden durch (S, V, N), wobei

S = Entropie

V = Volumen

N = Teilchenzahl (approx. kontinuierlich)

= Anzahl Moleküle

$(S,V,N) : M \to (0,\infty)^3$ Koordinatensystem

$T : M \to (0,\infty)$ Temperatur

$P : M \to (0,\infty)$

$(T,P,N) : M \to (0,\infty)^3$ anderes Koo'system

$(T,P,N) \circ (S,V,N)^{-1} : (0,\infty)^3 \to (0,\infty)^3$ Diffeomorphismus

6.8 Satz über die Umkehrabb.

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$, $b \in G$

$Df(b) \in M(n, \mathbb{R})$ inv.bar. Dann

$\exists$ offene Umg. U von b: $U \subset G$ und

$$f|_U : U \longrightarrow f(U) \quad \text{ist Diffeo.}$$

Bew SIF: $F(x,y) = x - f(y)$

$a := f(b)$. Dann

$$F(x, \underset{g(x)}{y}) = 0 \iff x = f(g(x)) \iff g = f^{-1}.$$

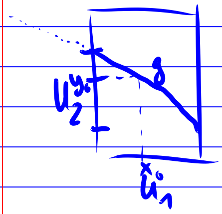
$$F : \mathbb{R}^n \times G \to \mathbb{R}^n, \quad Y_0 = D_y F|_{(a,b)} = -Df|_b \ \text{inv.bar}$$

$$\overset{SIF}{\Longrightarrow} \exists U_1 \subset \mathbb{R}^n \ \exists U_2 \subset G \ \exists g : U_1 \to U_2, \ C^1(U_1, U_2)$$

$$\forall (x,y) \in U_1 \times U_2 : \quad F(x,y) = 0 \iff y = g(x)$$

$$\Updownarrow$$

$$x = f(y)$$



$$U := g(U_1)$$

Dann ist U offen

(denn $y_0 \in U \Rightarrow y_0 = g(x_0)$, f st. in y_0

$\Rightarrow \exists$ Umg $V \subset U_2$ von y_0: $f(V) \subset U_1$ $\Rightarrow$

$V \subset g(U_1) = U$)

$\Rightarrow f|_U$ ist Diffeo. $\square$

Bsp. 6.9 Kugelkoordinaten

$$f(r,\vartheta,\varphi) = \left(r\sin\vartheta\cos\varphi,\ r\sin\vartheta\sin\varphi,\ r\cos\vartheta\right).$$

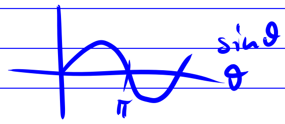
$$f : [0,\infty)\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$G := (0,\infty)\times(0,\pi)\times(-\pi,\pi)$$

Beh $f|_G : G \to f(G)$ Diffeo

Bew

$$\det\left(Df\,\big|_{(r,\vartheta,\varphi)}\right) = r^2\sin\vartheta \overset{>0}{\neq} 0 \quad \text{auf } G$$



$\overset{6.8}{\Longrightarrow}$ $f|_G$ ist lokal Diffeo

$f|_G$ ist inj. (geometrisch)

$\Rightarrow f|_G : G \to f(G)$ bij.

$f|_G \in C^1(G, f(G))$

$(f|_G)^{-1} \in C^1(f(G), G)$ weil das lokal so ist

$\Rightarrow f|_G$ ist Diffeo $G \to f(G)$. $\square$