Extrema unter Nebenbedingung

Problem: optimiere $f : G \to \mathbb{R}$ in der Menge $M := \{x \in G \mid h(x) = 0\}$, $G \subset \mathbb{R}^n$ offen

$h : G \to \mathbb{R}$

Bsp optimiere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, C^1 in $B_r(0)$

Max. im Innern $\Rightarrow \nabla f(x_0) = 0$

Max. auf Rand? $M = \partial \overline{B_r(0)}$

Vorgehen 1: wenn M parametrisiert werden kann, z.B. Kreis

$$\partial B_r(0) = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} \,\middle|\, \varphi \in [0, 2\pi] \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{r^2 - x^2} \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in [-r, r] \right\}$$

$\left(M = \{ u(\varphi) \mid \varphi \in I \} \text{ oder } \left\{ \begin{pmatrix} x \\ g(x) \end{pmatrix} \,\middle|\, x \in I \right\} \right)$

setze $v(\varphi) = f(u(\varphi))$, optimiere v auf I:

finde Pkte mit $v'(\varphi_0) = 0$; vgl. mit $v(0), v(2\pi)$.

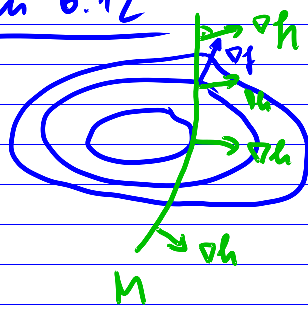
Vorgehen 2: "Lagrange-Multiplikator-Methode",

erfordert keine expl. Kenntnis von u oder g.

6.11 Satz über Extrema unter Nebenbed.

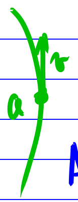
Seien $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f, h \in C^1(G)$,
$a \in M = \{x \in G \mid h(x) = 0\}$
$f|_M$ habe ein lok. Extr. in a
("f hat lok. Extr. unter der Nebenbed. $h=0$ in a")
und $\nabla h(a) \neq 0$.
Dann gibt es $\lambda \in \mathbb{R}$ ("Lagrange-Multiplikator")
mit $\nabla f(a) = \lambda \nabla h(a)$. ("Lagrange-Bed")

Bem 6.12



Wenn $\nabla f \nparallel \nabla h$, dann kann man entlang M den Wert von f erhöhen und erniedrigen.

Anders gesagt: Wenn $f|_M$ lok. Extr. in a hat, dann



$$\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0 \quad \forall v \text{ tangential an } M.$$

Also $\langle v, \nabla f(a)\rangle = 0$ immer wenn

$$\langle v, \nabla h(a)\rangle = 0$$

$$\overset{\nabla h \neq 0}{\Rightarrow} \quad \nabla f(a) \parallel \nabla h(a).$$

Bem Notw., aber nicht hinr. Bed. für lok. Extr. entlang M.