Beweis von Satz 6.11

$\nabla h(a) \neq 0 \Rightarrow$ o.B.d.A. $\underbrace{\frac{\partial h}{\partial x_n}(a) \neq 0}$.

$\bar{a} := (a_1 \dots a_{n-1})$

SIF: $\exists$ Umg V von $\bar{a}$, I von a_n, $V \times I \subset G$

$F = h$ $\qquad g \in C^1(V, I)$ $\forall (\bar{x}, x_n) \in V \times I$:

$x = \bar{x} = (x_1 \dots x_{n-1})$

$y = x_n$

$$h(\bar{x}, x_n) = 0 \Leftrightarrow x_n = g(\bar{x}).$$

$f|_M$ hat lok. Extr. in a $\Leftrightarrow$ $f(\bar{x}, g(\bar{x})) =: f \circ \varphi(\bar{x})$

mit $\varphi(\bar{x}) = (\bar{x}, g(\bar{x}))$

hat lok. Extr. in $\bar{a}$.

$$\Rightarrow \nabla (f \circ \varphi)(\bar{a}) = 0$$

Kettenregel: $\forall i \in \{1 .. n-1\}$

$$0 = \frac{\partial (f \circ \varphi)}{\partial x_i}(\bar{a}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(\bar{a})) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(\bar{a})$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f}{\partial x_j}(\varphi(\bar{a})) \delta_{ji} + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\varphi(\bar{a})) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_i}(\bar{a})$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(\underbrace{\varphi(\bar{a})}_{a}) + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\varphi(\bar{a})) \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{a}) \qquad (*)$$

Wegen $(h\circ\varphi)(\bar{x}) = 0 \quad \forall \bar{x}\in V$ gilt

$$0 = \frac{\partial(h\circ\varphi)}{\partial x_i}(\bar{a}) = \frac{\partial h}{\partial x_i}(\underbrace{\varphi(\bar{a})}_{a}) + \underbrace{\frac{\partial h}{\partial x_n}(\overset{\overset{a}{\shortparallel}}{\varphi(\bar{a})})}_{\neq 0} \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}^{(\bar{a})}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_i}(\bar{a}) = -\left(\frac{\partial h}{\partial x_n}(a)\right)^{-1} \frac{\partial h}{\partial x_i}(a) \quad (**)$$

Setze $\lambda := \dfrac{\partial_n f(a)}{\partial_n h(a)}$.

Dann $\underline{\underline{\partial_n f(a) = \lambda\, \partial_n h(a)}}$

und $\forall i \in \{1 \dots n-1\}$

$$(*) \overset{(**)}{\Longrightarrow} 0 = \partial_i f(a) + \underbrace{\partial_n f(a)\left(-\frac{\partial_i h(a)}{\partial_n h(a)}\right)}_{-\lambda\, \partial_i h(a)}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\partial_i f(a) = \lambda\, \partial_i h(a)}}. \qquad \square$$

<u>Bem 6.14</u> Vorgehen, als ob man $f - \lambda h$ optimierte, $\nabla(f-\lambda h) = 0$.
λ ergibt sich aus $\begin{cases} \nabla(f-\lambda h) = 0 \\ h = 0 \end{cases}$

Bsp 6.15

Satz Jede symm. relle Matrix A hat mind. einen reellen EW.

Bew $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \langle x, Ax \rangle$

$h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $h(x) = \langle x, x \rangle - 1$

$M = \{h = 0\} = \partial B_1(0) = S^{n-1}$ Einheitssphäre

M komp., f st. $\overset{\text{Weiers.}}{\Longrightarrow}$ nimmt Max. an, etwa bei $x_0 \in M$

$$2Ax_0 = \nabla f(x_0) = \lambda \nabla h(x_0) = 2\lambda x_0$$

$$\Longrightarrow \quad Ax_0 = \lambda x_0 \quad \text{für ein } \lambda \in \mathbb{R}$$

Also ist x_0 EV mit EW λ. $\square$

Bem 6.16 Mehrere Nebenbed.en

$h_1, \dots, h_k : G \to \mathbb{R}$

Finde Extr. von $f|_M$ auf (lok.)

$M = \{h_1 = 0\} \cap \{h_2 = 0\} \cap \dots \cap \{h_k = 0\}$

$n-k$-dim Fläche

Notw. Bed. $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0$ $\forall v$ tangential an M

d.h. tang. an alle $\{h_j = 0\}$

$\Rightarrow \langle v, \nabla f(a)\rangle = 0$ immer wenn

$\langle v, \nabla h_j(a)\rangle = 0 \quad \forall j \in \{1,\dots,k\}$

$\Rightarrow \nabla f(a) \in \operatorname{span}\{\nabla h_1(a), \dots, \nabla h_k(a)\}$

$\Rightarrow \boxed{\exists \lambda \in \mathbb{R}^k} : \quad \nabla f(a) = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \nabla h_j(a)$

$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_k \end{pmatrix}$: $\quad \boxed{\nabla (f - \lambda \cdot h)\big|_a = 0}$

$h \in C^1(\underset{\subseteq \mathbb{R}^n}{G}, \mathbb{R}^k)$, vorausgesetzt, dass

$\nabla h_1(a), \dots, \nabla h_k(a)$

linear unabh. sind.