Kap. 8: Gewöhnliche Differenzialgleichungen

partielle DGL, z.B. $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ (PDE)

gew. DGL, z.B. $\frac{dx}{dt} = x(t)$ (ODE)

ein Lsg. ist $x(t) = e^t$

Allg. ODE erster Ordnung:

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = \underline{f}\left(\underline{x}(t), t\right) \qquad (1)$$

unbek. $\underline{x} : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall
$\underline{x}$ diffbar

~~geg~~ geg. $\underline{f} : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset \mathbb{R}^{n+1}$ offen

"erster Ordnung" weil nur $\left(\frac{d}{dt}\right)^1$ vorkommt.

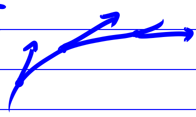
$\underline{x}$ = Lösung von (1)

$t_0 \in I$ Anfangszeit

$\underline{x}(t_0)$ Anfangswert

(1) heißt autonom oder zeitunabh.,
wenn $\underline{f}$ nicht von t abh.; dann
ist $\underline{f}(\underline{x}, t) = \underline{v}(\underline{x})$ für ein
Vektorfeld $\underline{v} : G' \to \mathbb{R}^n$, $G' \subset \mathbb{R}^n$
$G = G' \times \mathbb{R}$.
G' heißt Phasenraum.
$\underline{x}$ heißt Integralkurve von $\underline{v}$

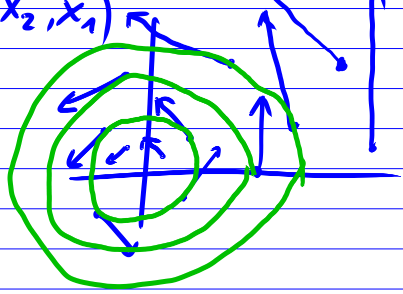
Lsg. $\underline{x}(t)$ "folgt dem Vektorfeld $\underline{v}$",
d.h. stets tangential an $\underline{v}$



<u>Phasendiagramm</u>: skizziere $\underline{v}$,
einige Lsgen $\underline{x}$

<u>Bsp</u> $\underline{v}(x_1,x_2) = (-x_2, x_1)$

$\underline{v}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$



DGL: $\dot{\underline{x}} = \underline{v}(\underline{x})$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$$

$\underline{x}(t) = \big(r\cos(t+\varphi),\ r\sin(t+\varphi)\big)$,
$\underline{x}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist Lsg., denn

$$\dot{x}_1 = -r\sin(t+\varphi)$$
$$\dot{x}_2 = r\cos(t+\varphi)$$

Anfangswert (AW) $\underline{x}(0) = (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$
AZ $t_0 = 0$

<u>Bem</u> Manche Relationen zw. $\underline{x}(t)$
und $\dot{\underline{x}}(t)$ gelten nicht als
ODE, z.B.

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = x_1^2 + x_2^2$$

Allg. ODE m-ter Ordnung:

$$\frac{d^m \underline{x}}{dt^m} = \underline{f}\left(\underline{x}(t), \dot{\underline{x}}(t), \ldots, \frac{d^{m-1}\underline{x}}{dt^{m-1}}(t), t\right)$$

unbek. $\underline{x} : I \to \mathbb{R}^n$ („Lösung")

geg. $\underline{f} : G \to \mathbb{R}^n$, $G \subset (\mathbb{R}^n)^m \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{mn+1}$

Anfangswert $\left(\underline{x}(t_0), \frac{d\underline{x}}{dt}(t_0), \ldots, \frac{d^{m-1}\underline{x}}{dt^{m-1}}(t_0)\right)$

<u>autonom</u>, falls $\underline{f}$ nicht von t abhängt.