Reduktion auf ODE erster Ordnung

Führe weitere Variablen $(\underline{y}_1, \underline{y}_2, \dots \underline{y}_{m-1}) \in (\mathbb{R}^n)^{m-1}$ ein mit der Absicht,

$$\underline{y}_1 = \frac{d\underline{x}}{dt}, \quad \underline{y}_2 = \frac{d^2\underline{x}}{dt^2}, \quad \dots, \quad \underline{y}_{m-1} = \frac{d^{m-1}\underline{x}}{dt^{m-1}}$$

Betrachte ODE erster Ordg in $\mathbb{R}^{nm}$

$$(3) \quad \begin{cases} \dot{\underline{x}} = \underline{y}_1 \\ \dot{\underline{y}}_1 = \underline{y}_2 \\ \vdots \qquad \vdots \\ \dot{\underline{y}}_{m-1} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{m-1}, t) \end{cases}$$

d.h. $$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ \underline{y}_1(t) \\ \vdots \\ \underline{y}_{m-1}(t) \end{pmatrix}, \quad \frac{d\gamma}{dt} = \underline{f}_1(\gamma(t), t) \qquad (4)$$

mit

$$\underline{f}_1(\underline{x}, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{m-1}, t) = \begin{pmatrix} \underline{y}_1 \\ \underline{y}_2 \\ \vdots \\ \underline{y}_{m-1} \\ \underline{f}(\underline{x}, \underline{y}_1, \dots, \underline{y}_{m-1}, t) \end{pmatrix}$$

Dann $(4) \Leftrightarrow (2)$

Reduktion auf eine autonome ODE

(1) $\qquad \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$

Führe weitere Variable $s \in \mathbb{R}$ ein,

$y = \begin{pmatrix} \underline{x} \\ s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und gl.en

$$\begin{cases} \dot{s} = 1 \\ \dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, s) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\dot{y}(t) = f_0(y(t))}_{\text{autonome ODE}} \qquad$ mit $f_0(\underline{x}, s) = \begin{pmatrix} \underline{f}(\underline{x}, s) \\ 1 \end{pmatrix}$

$f_0 : G \to \mathbb{R}^{n+1}$

$\hookrightarrow$ Def. ber. von $\underline{f}$

Dann ist für jede Lsg. $\underline{x}(t)$ von (1) zum AW $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$:

$y(t) = \begin{pmatrix} \underline{x}(t) \\ t \end{pmatrix}$ eine Lsg von $\dot{y} = f_0(y)$

zum AW $y(t_0) = \begin{pmatrix} \underline{x}_0 \\ t_0 \end{pmatrix}$ und umgekehrt.

Fazit $\qquad$ Sätze über alle autonomen ODEs erster Ordg decken <u>alle</u> ODE ab.

Bem Was heißt "lösen" einer ODE?

- Oft $\exists$ Lsg $\underline{x}(t)$, die sich nicht durch Formel ausdrücken lässt.
- Existiert zu jedem $\underline{x}_0$ eine eind. Lsg $\underline{x}(t)$ von $\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}(t), t)$ mit $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$?
- Eigenschaften der Lsg $\underline{x}(t)$:
  - Symmetrien?
  - periodisch?
  - beschr.?
  - $\exists \lim_{t \to \infty} \underline{x}(t)$?
  - oder asymptotisches Verhalten bei $t \to \infty$?

Bem $\dot{\underline{x}} = \underline{v}(\underline{x})$

$\underline{v}(\underline{x}_0) = \underline{0}$, dann $\underline{x}(t) = \text{const.} = \underline{x}_0$

$\underline{x}_0$ heißt <u>stationärer Punkt</u>

oder <u>Gleichgewichtslage</u>.