Separation der Variablen $(n=1)$

Heuristisch:

autonome ODE $\dot{x} = f(x)$

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \implies \frac{dx}{f(x)} = dt$$

$$\implies \underbrace{\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{dx}{f(x)}}_{=: G(x(t_1))} = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0$$

↑ bek.

Löse Gl. $G(x(t_1)) = t_1 - t_0$ nach $x(t_1)$ auf.

Auch noch für nicht-autonome ODEs der Form $\dot{x} = a(t)\, b(x)$.

$$\implies \frac{dx}{dt} = a(t)\, b(x) \implies \frac{dx}{b(x)} = a(t)\, dt$$

$$\implies \underbrace{\int_{x(t_0)}^{x(t_1)} \frac{dx}{b(x)}}_{=: G(x(t_1))} = \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} a(t)\, dt}_{\text{bek. } (t_1)}$$

↑ bek.

Rigoros:

Prop. 8.9 Seien $D \subset \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle

$a : I \to \mathbb{R}$, $b : D \to \mathbb{R}$ st., $f(x,t) = a(t)\, b(x)$

$(x_0, t_0) \in D \times I$ mit $\cancel{f(x_0,t_0)}\ b(x_0) \neq 0$

Dann $\exists$ Umg $U_1 \subset I$ von t_0

$\exists$ Umg $U_2 \subset D$ von x_0:

die Gl.

$$F(x,t) := \int_{t_0}^{t} a(t')\, dt' - \int_{x_0}^{x} \frac{dx'}{b(x')} \overset{!}{=} 0$$

hat eind. C^1-Lsg. $x : U_1 \to U_2$, und

x ist Lsg. der ODE $\dot{x} = f(x,t)$ zum

AW x_0 zur AZ t_0.

Beweis (SIF). Vor $\Rightarrow$ $b(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow$ $b(x) \neq 0$ in einer Umg. von x_0.

$\Rightarrow$ in Umg. von (x_0, t_0) ist F def.

und C^1, $F(x_0, t_0) = 0$,

$\cancel{D_y F}$ $\quad \partial_x F(x_0, t_0) = -\frac{1}{b(x)} \neq 0$

$\overset{\text{SIF}}{\Longrightarrow}$ $\exists U_1, U_2, x(t)$: $F(x(t), t) = 0$ $\forall t \in U_1$

und $$\dot{x}(t) = - \underbrace{\partial_x F(x(t),t)^{-1}}_{\left(-\frac{1}{b(x(t))}\right)^{-1} = -b(x(t))} \cdot \underbrace{\partial_t F(x(t),t)}_{a(t)}$$

$$= a(t)\, b(x(t)) = f(x(t), t).$$

$\square$