Satz von Picard-Lindelöf

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen.

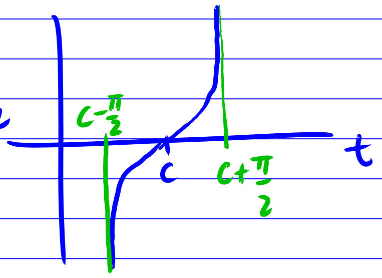
8.12 b) Bsp $\quad \dot{x} = v(x) = 1+x^2$

$\nexists$ stat. Pkt $\qquad \frac{dx}{dt} = 1+x^2$

$$t = \int_0^t dt' = \int_{x(0)}^{x(t)} \frac{dx'}{1+x'^2} = \arctan x(t) - \arctan x(0)$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = \tan(t-c)$$

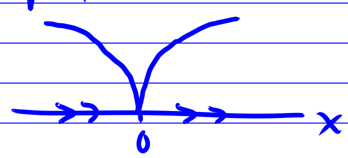
läuft in endl. Zeit ins Unendliche



$x: (c-\frac{\pi}{2}, c+\frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$

8.12 c) Bsp $\quad v(x) = \sqrt{|x|}$

(ÜA) $\quad \dot{x} = v(x)$



8.16 Satz von Picard-Lindelöf

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ gebiet, $v: G \to \mathbb{R}^n$ lokal Lipschitz-stetig, $x_0 \in G$

Existenz: $\exists\, \delta > 0 \;\; \exists\, x \in C^1((-\delta,\delta), G)$:

$$\dot{x} = v(x) \quad \text{und} \quad x(0) = x_0 \quad (\text{AWP})$$

Eindeutigkeit: Ist $I \subset \mathbb{R}$ Intervall, $0 \in I$

$\tilde{x} : I \to G$ diffbare Lsg des AWP (d.h. $\dot{\tilde{x}} = v(\tilde{x})$, $\tilde{x}(0) = x_0$)

dann $\tilde{x}(t) = x(t) \quad \forall t \in (-\delta,\delta) \cap I$.

Bem 8.17 c) Ist $x(\cdot)$ Lsg zum $\text{AW}\, x_0$, dann ist $\tilde{x}(t) := x(t+\tau)$ Lsg von $\dot{x} = v(x)$ zum AW $x(\tau)$,

denn $\dot{\tilde{x}}(t) = \dot{x}(t+\tau) = v(x(t+\tau))$
$= v(\tilde{x}(t))$

(Wenn $x : I \to G$, dann $\tilde{x} : I - \tau \to G$.)