lokal Lipschitz-stetig

Def. 8.13 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ offen, $v : G \to \mathbb{R}^n$

a) Erinnerung: v heißt Lipschitz-stetig

$$\iff \exists L \geq 0 : \forall x, y \in G : \|v(x) - v(y)\| \leq L \|x - y\|.$$

b) v heißt lokal Lipschitz-stetig $\iff$

$\forall x \in G \ \exists$ Umg. U von x : $v|_U$ ist Lipschitz-st.

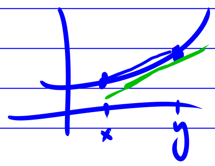
~~Bsp~~

Bem In $\mathbb{R}^1$: $v : \underset{\text{Wenn off. Int}}{I} \to \mathbb{R}$ diffbar,

und v' beschr. (d.h. $\|v'\|_\infty < \infty$)

$\Rightarrow$ v Lipschitz mit $L = \|v'\|_\infty$.

~~Bsp~~



Bew

$x \neq y \Rightarrow$ $\dfrac{|v(x) - v(y)|}{|x - y|} \overset{\text{MWS}}{=} |v'(\xi)|$

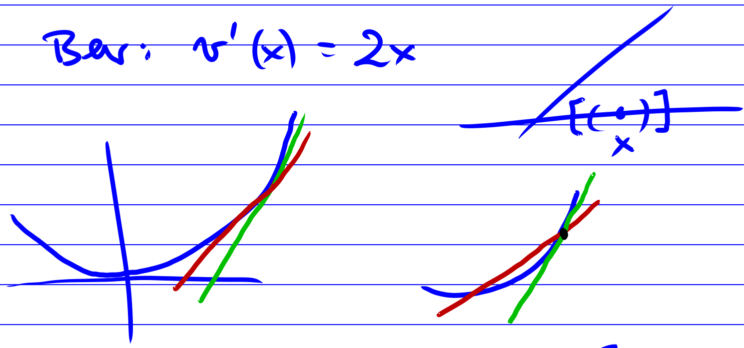
oBdA $x < y$ mit $x < \xi < y$

$\leq \|v'\|_\infty$ $\square$

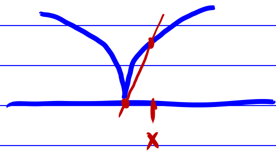
Bsp a) $v(x) = x^2$ ist lok. Lip.

aber nicht global Lip.

Bew: $v'(x) = 2x$



b) $v(x) = \sqrt{|x|}$



$x > 0$ $$\frac{v(x)-v(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \to 0} \infty.$$

nicht lok. Lip.

Bem 8.14 $v \in C^1(G, \mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ v lok. Lipschitz. (ÜA)

Prop. 8.15 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet,

$v : G \to \mathbb{R}^n$ lok. Lip.,

Dann gilt: Für jedes Kompaktum $K \subset G$

ist $v|_K$ Lipschitz. (ÜA)