Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf

Idee: (AWP) $\overset{\text{Int.}}{\Longrightarrow}$

$$x(t)-x(0) = \int_0^t \dot{x}(t')\,dt' = \int_0^t v(x(t'))\,dt'$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = x(0) + \int_0^t v(x(t'))\,dt'$$

d.h. x ist Fixpunkt von

$$\Phi : \varphi \mapsto \Phi[\varphi]$$

$$\boxed{\Phi[\varphi](t) = x_0 + \int_0^t v(\varphi(t'))\,dt'}$$

Banach-Fixpunktsatz.

Brauchen: einen Banachraum stetiger Fktnen φ, auf dem Φ eine Kontraktion ist

BFPS $\Rightarrow$ Beh.

[φ Fixpkt von Φ und φ st. $\overset{\text{HS}}{\Rightarrow}$ φ diffbar, $\dot{\varphi} = v(\varphi)$.]

Also: • $\exists r>0$: $K := \overline{B_r(x_0)} \subset G$

• K komp., $v|_K$ st.

$\Rightarrow \exists M>0\ \forall x \in K: \|v(x)\| \leq M$

$v|_K$ ist Lipschitz mit Konst. L

• setze $\delta := \min\left\{\frac{1}{L}, \frac{r}{M}\right\}$

$(-\delta, \delta)$, $0<\delta_0<\delta$ bel.

• setze $X := \{\varphi : [-\delta_0, \delta_0] \to \mathbb{R}^n \mid \varphi \text{ st.}\}$

$= C\left([-\delta_0, \delta_0], \mathbb{R}^n\right)$

mit Norm

$$\|\varphi\|_\infty = \sup_{t\in[-\delta_0,\delta_0]} \|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n} < \infty$$

• $(X, \|\cdot\|_\infty)$ ist Banachraum

• $A := \{\varphi \in X \mid \varphi(0) = x_0,\ \varphi([-\delta_0, \delta_0]) \subset K\}$

ist abg. Teilmenge von X.

$\Rightarrow A$ vollst. metr. Raum.

- Für $\varphi \in A$ def.

$$\Phi[\varphi] \text{ wie oben } [-\delta_0, \delta_0] \to \mathbb{R}^n$$

- Dann ist $\Phi[\varphi] \in A$, denn
  - $\Phi[\varphi]$ ist st. (sogar differ)
  - $\Phi[\varphi](0) = x_0$
  - $\Phi[\varphi](t) \in K \quad \forall t \in [-\delta_0, \delta_0]$

weil

$$\| \Phi[\varphi](t) - x_0 \|_{\mathbb{R}^n} =$$

$$\left\| \int_0^t v(\varphi(t'))\,dt' \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \int_0^t \underbrace{\| v(\underbrace{\varphi(t')}_{\in K}) \|_{\mathbb{R}^n}}_{\leq M} dt'$$

bzw. $\int_t^0$ falls $t<0$

oder $\int_{\min(0,t)}^{\max(0,t)}$

$$\leq \int_{\min(0,t)}^{\max(0,t)} M\,dt' = |t|\,M \leq \delta_0 M$$

$$< \delta M \leq \frac{r}{M} M = r.$$

Also $\Phi|_A : A \to A$

- Kontraktion mit Konst

$$\theta := \delta_0 L < \delta L \leq 1, \text{ denn}$$

$\forall \varphi, \psi \in A$

$$\| \Phi[\varphi] - \Phi[\psi] \|_\infty =$$

$$= \sup_{|t| \le \delta_0} \left\| \int_0^t \left(v(\varphi(t')) - v(\psi(t')) \right) dt' \right\|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\le \sup_{|t| \le \delta_0} \int_{\min(0,t)}^{\max(0,t)} dt' \underbrace{\| v(\varphi(t')) - v(\psi(t')) \|_{\mathbb{R}^n}}_{\le L \underbrace{\| \varphi(t') - \psi(t') \|_{\mathbb{R}^n}}_{\le \| \varphi - \psi \|_\infty}}$$

$$\le \sup_{|t| \le \delta_0} \int_{\min(0,t)}^{\max(0,t)} dt' \, L \, \| \varphi - \psi \|_\infty$$

$$= \sup_{|t| \le \delta_0} |t| \, L \, \| \varphi - \psi \|_\infty$$

$$= \delta_0 L \| \varphi - \psi \|_\infty = \vartheta \| \varphi - \psi \| .$$

- BFPS $\Longrightarrow \exists_1 \varphi : \ \Phi[\varphi] = \varphi$.

  $\varphi : [-\delta_0, \delta_0] \to G$ ~~$(E \ldots)$~~ $\delta_0 \, \delta_0 \, \delta$

- setze $x : (-\delta, \delta) \longrightarrow G$

  $x(t) = \varphi(t)$

  für irgendein $\delta_0 \in (|t|, \delta)$

$x(t)$ hängt nicht von δ_0 ab, weil jeder Fixpkt von Φ_{δ_0} auch Fixpkt von Φ_{δ_1} mit $\delta_1 \le \delta_0$ ist.

- $x(\cdot)$ ist st. und

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(x(t'))\,dt'$$

$$\forall t \in (-\delta, \delta) \qquad \text{statt } [-\delta_0, \delta_0]$$

$\Rightarrow x(\cdot)$ st. diffb.,

$$\dot{x}(t) = v(x(t)), \quad x(0) = x_0$$

Eindeutigkeit: $\dot{\tilde{x}}(t) = v(\tilde{x}(t)), \quad \tilde{x}(0) = x_0$

$$\tilde{x} : I \to G, \quad 0 \in I$$

Also lösen $x\big|_{(-\delta,\delta)\cap I}$ und $\tilde{x}\big|_{(-\delta,\delta)\cap I}$

(AWP) $\Rightarrow$ sind Fixpkte von Φ auf $[-\delta_0, \delta_0] \cap I$

Φ ist auf $[-\delta_0, \delta_0] \cap I$ Kontraktion

$\overset{\text{BFPS}}{\Longrightarrow}$ Fixpkt eind.

$$\Rightarrow x\big|_{(-\delta,\delta)\cap I} = \tilde{x}\big|_{(-\delta,\delta)\cap I}$$

$\square$