Bem 8.17 d)

SPL auch numerisch nutzbar

$$\Phi[\varphi_n] =: \varphi_{n+1}, \quad \varphi_1(t) := x_0$$

$$\varphi_n \to x \qquad \text{"Picard-Iteration"}$$

besser als das offensichtliche Verfahren

$$x((n+1)\Delta t) = x(n\Delta t) + v\big(x(n\Delta t)\big)\Delta t$$

Bem 8.17 b) untere Schranke für die Lebensdauer der Lösung

$$\delta(x_0) = \min\left\{\frac{1}{L(x_0)}, \frac{r(x_0)}{M(x_0)}\right\}$$

Maximale Lösung

Def 8.18 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $v: G \to \mathbb{R}^n$ st.,
$I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall,
$x: I \to G$, $\dot{x} = v(x)$ heißt eine
<u>maximale Lösung</u>, wenn gilt:
Ist $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ Intervall, $\tilde{I} \supset I$, $\tilde{x}: \tilde{I} \to G$
Lsg von $\dot{\tilde{x}} = v(\tilde{x})$ und $\tilde{x}|_I = x$, dann
ist $\tilde{I} = I$ und $\tilde{x} = x$. ("kann nicht fortgesetzt werden")

Prop 8.19 Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ gebiet,
$v: G \to \mathbb{R}^n$ lok. Lip.
$I, \tilde{I} \subset \mathbb{R}$ offene Intervalle, $0 \in I \cap \tilde{I}$,
$x: I \to G$, $\tilde{x}: \tilde{I} \to G$ Lsgen von $\dot{x} = v(x)$
mit AW $x(0) = x_0 = \tilde{x}(0) \in G$. Dann

$$x(t) = \tilde{x}(t) \quad \forall t \in I \cap \tilde{I}.$$

Beweis Sei $A := \{ t \in I \cap \tilde{I} \mid x(t) = \tilde{x}(t) \}$

Z.z. $A = I \cap \tilde{I}$.

Sei $I =: (t_-, t_+)$, $\tilde{I} =: (\tilde{t}_-, \tilde{t}_+)$

OBdA $t_+ \leq \tilde{t}_+$

$$t_0 := \sup \{ \tau \in (0, t_+) \mid \forall t \in [0, \tau] : x(t) = \tilde{x}(t) \}$$

Z.z.: $t_0 = t_+$.

SPL $\Rightarrow \exists \delta > 0 \; \forall t \in [0, \delta) : x(t) = \tilde{x}(t)$.

Also $0 < \delta \leq t_0 \leq t_+$.

Wäre $t_0 < t_+$: $\quad x|_{[0,t_0)} = \tilde{x}|_{[0,t_0)}$

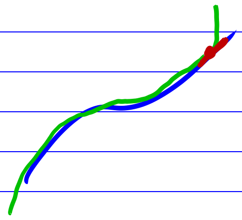
$x, \tilde{x}$ st. $\Rightarrow \quad x|_{[0,t_0]} = \tilde{x}|_{[0,t_0]}$

$x(t_0) = \tilde{x}(t_0) =: \tilde{x}_0$

SPL $\Rightarrow \exists \delta_{\tilde{x}_0} > 0 : \; \forall t \in (t_0 - \delta_{\tilde{x}_0}, t_0 + \delta_{\tilde{x}_0})$
$$x(t) = \tilde{x}(t)$$

$\lightning$ zu Def. von t_0

Also $t_0 = t_+$. Ebenso untere Grenze. $\square$



Satz 8.20

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $v: G \to \mathbb{R}^n$ lok. Lip., dann ex. zu jedem $x_0 \in G$ genau eine max. Lsg mit AW x_0.

Beweis Sei $I := \{ t \in \mathbb{R} \mid \exists \text{ Int. } J \subset \mathbb{R},\ x: J \to G : 0, t \in J,\ x(0) = x_0,\ \dot{x} = v(x) \}$

"$I = \bigcup J$" $\Rightarrow$ I ist Int.

SPL $\Rightarrow$ I ist offen

Setze $x_{max}(t) := x(t) \quad \forall t \in I$

wohldef. von $x(\cdot)$ nach Prop. 8.19

Dann $x_{max}(0) = x_0$ und $\dot{x}_{max}(t) = v(x_{max}(t))$

weil sie auf einer Umg. von t mit einer Lsg. übereinstimmt.

$x_{max}(\cdot)$ ist max. Lsg.

Prop. 8.19 $\Rightarrow$ max. Lsg ist eind. $\square$

Notation

Definitionsintervall $I(x_0)$ von $x_{max}(\cdot)$

$$I(x_0) = (t_-(x_0), t_+(x_0))$$

mit $t_-(x_0) \in [-\infty, 0)$

$t_+(x_0) \in (0, \infty]$

Sei $\Omega := \{ (t, x_0) \in \underbrace{\mathbb{R} \times G}_{\text{"Phasenraumzeit"}} \mid t \in I(x_0) \}$

und $\varphi(t, x_0) = x_{max}(t)$ mit $x_{max}(0) = x_0$

$\varphi : \Omega \to G$ heißt <u>Flussabbildung</u>

Auch $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$

$\varphi_t : \Omega_t \to G$, $\Omega_t := \{ x \in G \mid (t, x) \in \Omega \}$

"Zeit-Entwicklung um t"

<u>Bericht</u> Ω offen, $\varphi : \Omega \to G$ st.,

$\varphi \in C^1$ falls $v \in C^1$.