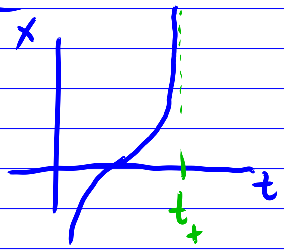
Kompakta verlassen

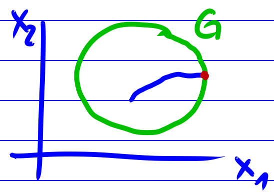
$v(x) = 1 + x^2$



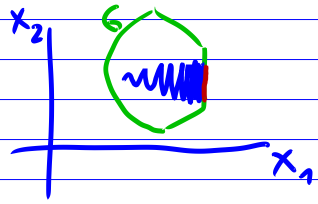
$t_+ < \infty$

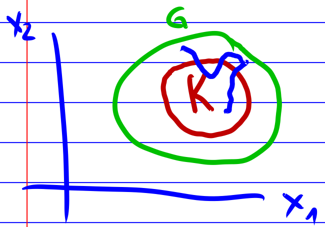
- $\|x(t)\| \xrightarrow{t \to t_+} \infty$

- $d\big(x(t), G\big) \xrightarrow{t \to t_+} 0$



$v : G \to \mathbb{R}^n$





$K \subset G$, K komp.

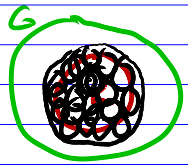
$G = \mathbb{R}^n$

Satz 8.22

Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ gebiet, $v : G \to \mathbb{R}^n$ lok. Lip.
$x : (t_-(x_0), t_+(x_0)) \to G$ die max. Lsg.
von $\dot{x} = v(x)$ zum AW x_0.
Falls $t_+(x_0) < \infty$, dann gibt es
zu jedem Kompaktum $K \subset G$ ein
$0 < \tau_K < t_+(x_0)$ mit

$$\forall t \in (\tau_K, t_+(x_0)) : \quad x(t) \notin K.$$

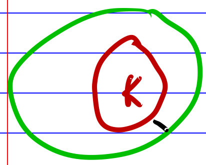
Beweis 1) $\exists \rho>0 \ \forall x\in K: B_\rho(x)\subset G$



denn entweder $G=\mathbb{R}^n$ (klar)

oder $x\mapsto \operatorname{dist}(x,\partial G)$

$$= \inf\{\|x-y\| \mid y\in\partial G\}$$



ist st., nimmt auf K Min. $=:\rho$ an und $\rho>0$, sonst $K\cap\partial G\neq\emptyset$ (also $K\not\subset G$ ↯)

2) Seien $\|v(x)\|\leq M \ \forall x\in\overline{B_{\rho/2}(K)} = \bigcup_{y\in K}\overline{B_{\rho/2}(y)}$

und L Lip.-Konst. für $v|_{\overline{B_{\rho/2}(K)}}$

3) Wenn $t\in(0,t_+(x_0))$ und $x(t)\in K$, dann

$$t_+(x_0) = t_+(x(t))+t \geq \delta+t$$

mit $\delta = \min\left\{\frac{1}{L}, \frac{\rho/2}{M}\right\}$ (SPL / Beweis)

4) Für $t\in(\underbrace{t_+(x_0)-\delta}_{=:T_K}, t_+(x_0))$ gilt $x(t)\notin K$.

Entspr. falls $t_->-\infty$. $\square$

Folgerung 8.23 e)

Bleibt $x(\cdot)$ in einem Kompaktum,
(insbes. falls $x(t) \xrightarrow{t \to t_+(x_0)} p \in G$)
dann $t_+(x_0) = \infty$.

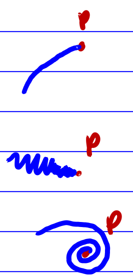
Bem Falls $x(t) \xrightarrow{t\to\infty} p$, dann ist p stationär,
$v(p) = 0$.

Bew $\dot{x}(t) = v(x(t)) \xrightarrow{t\to\infty} v(p)$ weil v st.

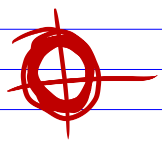
und wenn $v(p) \neq 0$, dann kann
$x(t)$ nicht konv.

(Beachte: i. allg. für Kurven
$$y(t) \xrightarrow{t\to\infty} p \not\Rightarrow \dot{y}(t) \xrightarrow{t\to\infty} 0.$$

Bsp
$$y(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t}\cos t^2 \\ \frac{1}{t}\sin t^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{t\to\infty} 0 = p$$



$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{t^2}\cos t^2 - \frac{2t}{t}\sin t^2 \\ \underbrace{-\frac{1}{t^2}\sin t^2}_{\to 0} + \underbrace{\frac{2\cancel{t}}{\cancel{t}}\cos t^2}_{\not\to 0} \end{pmatrix} \not\to 0.$$
)



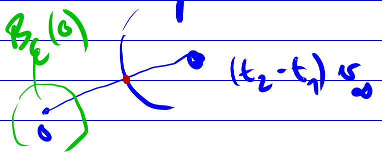
Wenn $\dot{x}(t) \xrightarrow{t\to\infty} \underset{\mathbb{R}^n}{\overset{}{v_\infty}} \neq 0$, dann ist

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \underbrace{\dot{x}(t')}_{\in B_\varepsilon(v_\infty)} dt' \in B_{\varepsilon(t_2-t_1)}\big((t_2-t_1)v_\infty\big)$$

für t_1, t_2 groß genug

und $B_{\varepsilon(t_2-t_1)}\big((t_2-t_1)v_\infty\big) \cap B_\varepsilon(0) = \emptyset$

für $0 < \varepsilon < \frac{\|v_\infty\|}{2}$ und $t_2 - t_1 \geq 1$



Also ist $x(n)$ keine Cauchy-Folge

Also ist $x(n)$ nicht konv.

Also ist $x(t)$ nicht konv, $\nexists \lim_{t\to\infty} x(t)$

$\square$