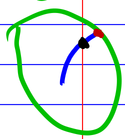
Globale Existenz

d.h. $I_{max}(x_0) = \mathbb{R}$

Lemma Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $v : G \to \mathbb{R}^n$ lok. Lip.,
Wenn $\exists \delta > 0\ \forall x_0 \in G : t_+(x_0) \geq \delta$,
dann ist $t_+(x_0) = \infty \quad \forall x_0 \in G$.

Beweis Wäre $t_+(x_0) < \infty$, dann

G



$$\frac{\delta}{2} = t_+\left(x_{max}\left(t_+(x_0) - \frac{\delta}{2}\right)\right) \geq \delta \quad ↯ \qquad \square$$

Prop Wenn v global definiert ist, $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$
und v global Lip., dann ex. $\forall x_0 \in \mathbb{R}^n$
eine (eind.) globale Lsg $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$
von $\dot{x} = v(x)$ mit $x(0) = x_0$.

Bew

$\underset{\text{Bew}}{\text{SPL}} \Rightarrow t_+(x_0) \geq \min\left\{\frac{1}{L(x_0)}, \frac{r(x_0)}{M(x_0)}\right\}$

hier $L(x_0) = L$ unabh. von x_0

r so dass $\overline{B_r}(x_0) \subset G$, hier: $r > 0$ bel.

$$M(x_0) = \sup_{x \in \overline{B_r}(x_0)} \|v(x)\| \overset{Lip.}{\leq} \sup_x \left(\|v(x_0)\| + L\|x - x_0\|\right)$$

$$= \|v(x_0)\| + Lr$$

$$\frac{r}{M} \geq \frac{r}{\|v(x_0)\| + Lr} = \frac{1}{L + \frac{\|v(x_0)\|}{r}}$$

Wähle $r = \begin{cases} \|v(x_0)\| & \text{falls } v(x_0) \neq 0 \\ 1 & \text{falls } v(x_0) = 0 \end{cases}$

Dann $\frac{r}{M} \geq \cancel{\frac{1}{x+1}}\ \frac{1}{L+1}$,

also $t_+(x_0) \geq \frac{1}{L+1} =: \delta \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$

Lemma $\Rightarrow$ Prop. $\square$

Bsp Newtonsche Mechanik

$\underline{q}_i(t) \in \mathbb{R}^3, \qquad i \in \{1 \dots N\}$

$$m_k \ddot{\underline{q}}_k = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} c_{jk} \frac{\underline{q}_j - \underline{q}_k}{\|\underline{q}_j - \underline{q}_k\|^3}$$

$c_{jk} = G m_j m_k - \frac{e_j e_k}{4\pi \varepsilon_0}, \quad k \in \{1 \dots N\}$

Reduktion 1. Ordnung $\quad \underline{p}_i := m_i \dot{\underline{q}}_i$

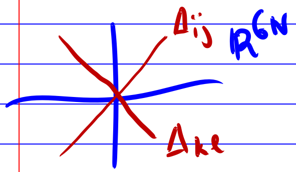
$$\begin{cases} \dot{\underline{q}}_k = \frac{1}{m_k} \underline{p}_k & = \underline{v}_k(x) \\ \dot{\underline{p}}_k = \sum_{j \neq k} c_{jk} \frac{\underline{q}_j - \underline{q}_k}{\|\underline{q}_j - \underline{q}_k\|^3} & = \underline{v}_{k+N}(x) \end{cases}$$

$x = (\underline{q}_1 \dots \underline{q}_N, \underline{p}_1 \dots \underline{p}_N) \in \mathbb{R}^{6N}$

$v \in C^\infty(G, \mathbb{R}^{6N}) \Rightarrow$ lok. Lip.

$$G = \{ x \in \mathbb{R}^{6N} \mid \forall j \neq k : \underline{q}_j \neq \underline{q}_k \}$$

$$= \mathbb{R}^{6N} \setminus \bigcup_{i \neq j} \Delta_{ij}, \quad \Delta_{ij} = \{ \underline{q}_i = \underline{q}_j \}$$



$$\frac{N^2 - N}{2} = \binom{N}{2}$$

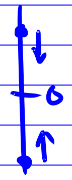
G offen, wegzshgd. $\Rightarrow$ Gebiet

__Frage:__ Ex. Lsg $x(t)$ global?

__Bsp__ $N = 2$, $e_1 = e_2 = 0$, $m_1 = m_2 = m$

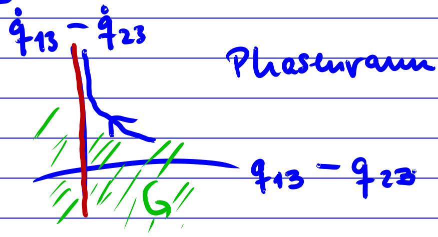
$$\underline{q}_1(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-t)^{2/3} R \end{pmatrix}, \quad \underline{q}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(1-t)^{2/3} R \end{pmatrix}$$

mit $R = \frac{1}{2}(9 G m)^{1/3}$ ist eine Lsg auf $(-\infty, 1)$. Teilchen kollidieren bei $t = 1$



$$\dot{\underline{q}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{2}{3}(1-t)^{-1/3} R \end{pmatrix}, \quad \dot{\underline{q}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{2}{3}(1-t)^{-1/3} R \end{pmatrix}$$

$$\| \dot{\underline{q}}_1(t) \| \xrightarrow{t \to 1} \infty, \quad t_+ = 1$$



ex. nicht global

Vermutung $\forall N \geq 2$

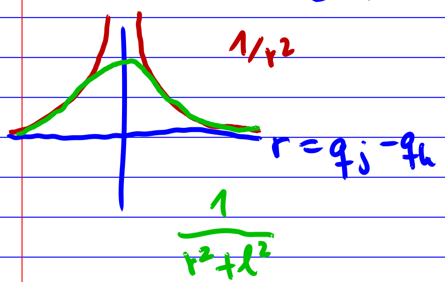
$$\mathrm{Vol}_{6N}\left\{x_0 \in G \,\middle|\, (t_-(x_0), t_+(x_0)) \neq (-\infty, \infty)\right\} = 0$$

„Fast alle Lsg. en ex. global".

(unbewiesen für $N \geq 5$,
bewiesen für $N = 2,3,4$ von
Donald Saari (1940 –) 1977)

Bem Ersetzt man $\dfrac{q_j - q_k}{\|q_j - q_k\|^3}$

durch $\dfrac{1}{\|q_j - q_k\|^2 + \ell^2} \, \dfrac{q_j - q_k}{\|q_j - q_k\|}$,



und G durch $\mathbb{R}^{6N}$,
dann ex. en alle
Lsg. en global.